Листок 03. Срок сдачи 21 октября 2016

Для сдачи каждой из задач 3.1 — 3.5 необходимо чисто рассказать одному преподавателю столько пунктов этой задачи, сколько преподаватель сочтет нужным выслушать. Задачи со звездочкой сдаются и фиксируются в кондуите, но в баллах не оцениваются.

03.01. Число e.

а) Докажите, что последовательность $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ ограниченная возрастающая.

б) Докажите, что $e = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, где $y_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

в) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$; г) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$;

03.02. Докажите, что а) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{a^x} = 0$, $a > 1$, $n > 0$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_a x}{x^\varepsilon} = 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $\varepsilon > 0$;

03.03. Вокруг теоремы Лагранжа. Во всех пунктах этой задачи функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b).

а) Докажите теорему Лагранжа.

б) Верно ли, что всегда существует такое число K, что $\forall\, x, y \in [a, b]$ верно $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|$?

в) Пусть f не является линейной функцией (т.е. $f(x)$ не есть $kx+b$). Докажите, что найдется $\xi \in (a, b)$ такое, что $|f'(\xi)(b - a)| > |f(b) - f(a)|$.

г) Верно ли, что для каждого $\xi \in (a, b)$ найдутся такие $x_1, x_2 \in [a, b]$, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)?$$

д) Пусть функция f дифференцируема n раз на (a, b). Предположим, что существуют такие точки $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < b$, что $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n)$. Докажите, что существует такая точка $x^* \in (a, b)$, что $f^{(n)}(x^*) = 0$.

03.04. а) Придумайте открытые покрытия интервала $(0, 1)$ и луча $[0, \infty)$, не имеющие конечных подпокрытий.

б) Докажите, что любая последовательность точек отрезка содержит сходящуюся подпоследовательность.

в) Докажите, что из любого покрытия отрезка открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

03.05. Монотонные функции. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — монотонная функция.

а) Докажите, что в любой точке $x_0 \in (a, b)$ существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;

б) Докажите, что множество точек разрыва f не более чем счётно;

в) Множество значений функции f является отрезком (либо $[f(a), f(b)]$, либо $[f(b), f(a)]$), если и только если функция f непрерывна на $[a, b]$;

г) Строго монотонная функция f является биекцией отрезков, если и только если она непрерывна.

03.06.* а) Докажите, что $e - y_n \leqslant \dfrac{1}{n!\,n}$.

б) Докажите, что e — иррациональное число.

03.07.* Докажите, что а) $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$;

б) последовательность $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n$ имеет предел (константа Эйлера C).

03.08.* Функция Римана $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ принимает значение 0 в иррациональных точках и значения q^{-1} в рациональных точках вида p/q (где p/q несократимая дробь). В каких точках функция Римана непрерывна, а в каких — разрывна?

03.09.* Докажите, что следующие три свойства подмножества X действительной прямой равносильны:
(1) любая последовательность точек множества X содержит сходящуюся подпоследовательность, предел которой лежит в X;
(2) из любого открытого покрытия множества X можно выбрать конечное подпокрытие;
(3) множество X замкнуто и ограничено.