Задачи 3. а) Функции Грина

Двумерные операторы Лапласа и Дирака

Функцией Грина оператора Лапласа $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = 4\partial_z\partial_{\bar z}$ на плоскости называется функция $G(z,\zeta) = G(\zeta, z)$ такая, что $\Delta_z G(z,\zeta) = 2\pi\delta^{(2)}(z-\zeta)$. Формально $\frac{1}{2\pi}G(z,\zeta)$ – это ядро интегрального оператора Δ^{-1}, обратного к оператору Лапласа.

Безмассовое уравнение Дирака на евклидовой плоскости $(\sigma_1\partial_x + \sigma_2\partial_y)\vec\psi = 0$ в комплексных координатах $z = x+iy$, $\bar z = x - iy$ расщепляется на два независимых уравнения для компонент вектора $\vec\psi$: $\partial_{\bar z}\psi_1 = 0$, $\partial_z\psi_2 = 0$. Аналогично случаю оператора Лапласа можно ввести функцию Грина как ядро оператора $\bar\partial^{-1}$.

1. Докажите, что $\partial_{\bar z}\dfrac{1}{z-\zeta} = \pi\delta^{(2)}(z-\zeta)$, и тем самым функция $\dfrac{1}{\pi(z-\zeta)}$ является функцией Грина для оператора Дирака (в голоморфных координатах).

2. Пользуясь результатом предыдущей задачи, проверьте, что $\log|z-\zeta|$ является функцией Грина оператора Лапласа.

Граничная задача Дирихле для оператора Лапласа

Пусть D – односвязная область в комплексной плоскости. Задача Дирихле состоит в отыскании функции Φ, гармонической в области D и такой, что Φ равна заданной функции f на границе области. Функцией Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в области D (далее просто функция Грина) называется функция $G(z,\zeta) = G(\zeta,z)$ в $D\times D$ такая, что: а) $\Delta_z G(z,\zeta) = 2\pi\delta^{(2)}(z-\zeta)$; б) $G(z,\xi) = 0$ при любых $z\in D$ и $\xi \in \partial D$.

1. Докажите, что $G(z,\zeta) = \log|z-\zeta| + O(1)$ при $z\to\zeta$.

2. Найдите функцию Грина, если D – а) верхняя полуплоскость, б) круг радиуса R с центром в 0.

3. Докажите, что функция Грина единственна и дается формулой
$$G(z,\zeta) = \log\left|\frac{w(z)-w(\zeta)}{1-w(z)\overline{w(\zeta)}}\right|,$$
где $w(z)$ – взаимно однозначное конформное отображение области D на единичный круг, существующее в силу теоремы Римана.

4. Решите уравнение Лапласа $(\partial_x^2+\partial_y^2)\Phi = 0$ в верхней полуплоскости $y\geq 0$ с граничным условием $\Phi(x,0) = 1$ при $|x|\leq 1$ и 0 при $|x|\geq 1$.

5.* Проверьте, что функция Грина дает решение граничной задачи Дирихле в области D с помощью формулы
$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial D} f(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}G(z,\xi)\,|d\xi|,$$
где как обычно $z = x+iy$ и $\partial/\partial n_\xi$ – нормальная производная по второму аргументу (единичные нормальный вектор считается направленным во внешность области). Подумайте, как можно было бы сформулировать аналог задачи Дирихле для оператора Дирака.

Задачи 3. b) Операторный формализм

1. Решите уравнение $\frac{d}{dt}G(x,x_0|t) = D\frac{d^2}{dx^2}G(x,x_0|t)$ при начальном условии $G(x,x_0|0) = \delta(x-x_0)$. Убедитесь, что оператор $e^{tD\frac{d^2}{dx^2}}$ (а точнее его ядро) решает то же самое уравнение с тем же начальным условием.

2. В случае осциллятора вычислите средние $\langle 0|\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)|0\rangle$ и $\langle 0|T\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)|0\rangle$. Каким уравнениям они удовлетворяют? Здесь $\hat{q}(t)$ — оператор координаты частицы в гейзенберговской картине.

3. Пользуясь операторным формализмом, вычислите коррелятор $\langle x(t_1)x(t_2)\rangle$ в евклидовой теории с циклическим временем $t \sim t+\beta$ и действием

$$S[x(t)] = \frac{1}{2}\int_0^\beta dt(\dot{x}^2 + x^2).$$

Чему будет равен фурье-образ этого коррелятора?

4. Вычислите в операторном формализме $\langle J(z_1)J(z_2)\rangle$ и $\langle J(z_1)J(z_2)J(z_3)J(z_4)\rangle$. Для чего оказывается нужным радиальное упорядочение? Здесь $\hat{J}(z) = \sum_n \frac{\hat{\alpha}_n}{z^{n+1}}$ — оператор голоморфного тока.

5. Пускай есть набор операторов $\hat{A}_i = \hat{A}_i^+ + \hat{A}_i^-$, такие что $\hat{A}_i^-|0>= 0$ и $<0|\hat{A}_i^+ = 0$. Кроме того, мы знаем всевозможные коммутаторы $[\hat{A}_i^+, \hat{A}_j^+] = [\hat{A}_i^-, \hat{A}_j^-] = 0$ и $[\hat{A}_i^-, \hat{A}_j^+] = G_{ij} \in \mathbb{C}$

   - Вычислите $<0|\hat{A}_i\hat{A}_j|0>$
   - Вычислите $<0|\exp(\hat{A}_1)\exp(\hat{A}_2)|0>$
   - * Вычислите $<0|\exp(\hat{A}_1)...\exp(\hat{A}_n)|0>$

6. Придумайте, как проквантовать фермионную теорию с действием

$$S[\psi,\bar{\psi}] = \frac{1}{\pi}\int d^2z\bar{\psi}\bar{\partial}\psi$$

Опишите её пространство состояний.