Задачи для самоподготовки к контрольной по топологии

10 октября 2016 г.

1 1-й модуль

1. Выпишите все попарно негомеоморфные топологии на множестве из 3 элементов.

2. Постройте гомеоморфизм между $B^n/\partial B^n$ и S^n; здесь B^n — замкнутый n-мерный шар, ∂B^n — его граничная сфера.

3. Проверьте, что а) $S(S^n) \cong S^{n+1}$; б) $S^n \star S^m \cong S^{n+m+1}$.

4. Докажите попарную гомеоморфность следующих трех пространств: прямые в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящие через начало координат; гиперплоскости в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящие через начало координат; $S^n/\mathbb{Z}_2$, образующая группы $\mathbb{Z}_2$ действует как центральное отражение.

5. Докажите, что пространство $\mathbb{R}P^n$ компактно.

6. Докажите, что а) $S^3 \setminus S^1 \cong \mathbb{R}^2 \times S^1$ (выкидываемая из трехмерной сферы окружность вложена в нее стандартным, незаузленным образом); б) $S^{n+m-1} \setminus S^{n-1} \cong \mathbb{R}^n \times S^{m-1}$.

7. Пусть $h : S^3 \to S^2 \cong \mathbb{C}P^1$ — расслоение Хопфа, $h : (z_0, z_1) \mapsto [z_0 : z_1]$. Докажите, что $S^2 \sqcup_h D^4 \cong \mathbb{C}P^2$.

8. Покажите, что в минимальной триангуляции тора $\mathbb{T}^2$ а) не меньше 7 вершин; б) 7 вершин.

9. Докажите, что а) бутылка Кляйна может быть получена склейкой квадрата по слову $c_1^2 c_2^2$; б) проективная плоскость с g ручками может быть получена склейкой $4g+2$-угольника по слову $c_1^2 c_2^2 \ldots c_{2g+1}^2$.

10. Докажите, что следующие пространства попарно гомотопически эквивалентны: $\mathbb{R}^3 \setminus S^3$ (выкидываемая из пространства окружность вложена в него стандартным, незаузленным образом); сфера S^2 со склееными северным и южным полюсами; сфера S^2, в которой приклеен отрезок, соединяющий северный полюс с южным; $S^2 \vee S^1$.

11. Докажите, что связный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей. Выразите число окружностей в букете через число вершин и ребер в графе.

12. Покажите, что пространство $\mathbb{R}^5$, из которого выкинуто пять трехмерных плоскостей $x_1 = x_2 = 0$, $x_2 = x_3 = 0$,$x_3 = x_4 = 0$,$x_4 = x_5 = 0$,$x_5 = x_1 = 0$, гомотопически эквивалентно сфере с 5-ю ручками.

13. Пусть $f, g : X \to Y$ —два гомотопных отображения, переводящих данную точку $x_0 \in X$ в одну и ту же точку $f(x_0) = g(x_0) \in Y$. Верно ли, что индуцированные ими гомоморфизмы $f_*, g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ совпадают?

14. Вычислите фундаментальные группы следующих пространств: а) $\mathbb{R}P^1$; б) $\mathbb{R}P^n$, $n \geq 2$; в) лист Мебиуса; г) бутылка Кляйна.

15. Вычислите фундаментальные группы следующих пространств: а) сфера с g ручками; б) проективная плоскость с g ручками; в) дополнение к трем координатным осям в $\mathbb{R}^3$.

16. Докажите, что дополнения к двум зацепленным и двум незацепленным окружностям в $\mathbb{R}^3$ между собой гомотопически неэквивалентны.

17. Докажите, что лента Мебиуса не ретрагируется на свою границу.