Листок 1. Многообразия Грассманна

Анализ на многообразиях 2016, **срок сдачи — 30.09.2016**

Для подмножества $I \subset \{1, \dots, n\}$ положим $\overline{I} = \{1, \dots, n\} \setminus I$, $|I|$ — количество элементов I.
Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим за $L_I \subset \mathbb{R}^n$ подпространство, порождённое набором e_i, где $i \in I$; за p_I обозначим проекцию $\mathbb{R}^n \to L_I$ вдоль $L_{\overline{I}}$.

1◇1 Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное подпространство.
a) Докажите, что p_I изоморфно отображает $L \to L_I$ тогда и только тогда, когда $\dim(L) = |I|$ и $L \cap L_{\overline{I}} = 0$. Назовём U_I множество таких L.
b) Пусть $L \in U_I$, q_I — ограничение p_I на L. Докажите, что L однозначно задаётся отображением $p_{\overline{I}} \circ q_I^{-1} : L_I \to L_{\overline{I}}$, тем самым, для $|I| = k$ точки U_I параметризуются матрицами $A_I(L)$ размера $k \times (n-k)$.
Подсказка: фактически, L является графиком этого отображения.

1◇2 a) Пусть $\dim L = |I| = |J| = k$, предположим, что $L \cap L_{\overline{I}} = L \cap L_{\overline{J}} = 0$. Как выражается $A_J(L)$ через $A_I(L)$?
b) Докажите, что атлас (U_I, A_I) для всех $I \subset \{1, \dots, n\}$ с $|I| = k$ определяет структуру гладкого многообразия на множестве k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$. Это многообразие называется *многообразием Грассманна* и обозначается $\mathrm{Gr}(k, n)$.
c) Докажите, что различный выбор базиса $\{e_i\}$ задаёт эквивалентные атласы этого многообразия.

1◇3 Докажите, что $\mathrm{Gr}(k, n)$
a) связно;
b) компактно.

1◇4 Постройте диффеоморфизм
a) $\mathrm{Gr}(1, n) \xrightarrow{\sim} P^{n-1}$;
b) $\mathrm{Gr}(k, n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}(n-k, n)$.
Подсказка: воспользуйтесь двойственным пространством или скалярным произведением в $\mathbb{R}^n$.

1◇5 Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — подмногообразие размерности k. Докажите, что отождествление касательных пространств с подпространствами $\mathbb{R}^n$ задаёт гладкое отображение $M \to \mathrm{Gr}(k, n)$.

1◇6 a) Докажите, что группа GL_n невырожненных операторов действует на $\mathrm{Gr}(k,n)$ посредством отображения соответствующих плоскостей.
b) Докажите, что это действие транзитивно, при этом тривиально действие только скаляров.
c) Найдите стабилизатор $L_{\{1,\dots,k\}}$.
d) Найдите стабилизатор произвольной точки $\mathrm{Gr}(k,n)$.

1◇7 a) Докажите, что подгруппа ортогональных матриц в GL_n действует транзитивно на $\mathrm{Gr}(k,n)$.
b) Найдите стабилизатор $L_{\{1,\dots,k\}}$.
c) Найдите стабилизатор произвольной точки $\mathrm{Gr}(k,n)$.

1◇8 Докажите, что действие GL_n определяет гладкое отображение многообразий $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{Gr}(k,n) \to \mathrm{Gr}(k,n)$.

1◇9 Найдите неподвижные точки для действия подгруппы $H \subset \mathrm{GL}_n$, составленной диагональными матрицами.

1◇10* При каких k и n $\mathrm{Gr}(k,n)$ является ориентируемым многообразием?

1◇11* Пусть $B \subset \mathrm{GL}_n$ — подгруппа верхнетреугольных матриц.
a) Докажите, что орбиты B — множества подпространств с фиксированными размерностями пересечений с подпростанствами $L_{\{1,2,\dots,s\}}$, $s = 1\dots n$.
b) Докажите, что эти орбиты являются *клетками* — образами гладкого вложения $\mathbb{R}^m$ в GL_n. Они называются *клетками Шуберта*.
c) Вычислите размерности этих клеток.

1◇12* Выберем произвольный базис в k-мерном подпространстве L и запишем координаты его векторов матрицей.
a) Докажите, что набор миноров размера k с точностью до пропорциональности не зависит от выбора базиса.
b) Докажите, что этот набор миноров задаёт гладкое отображение $\mathrm{Gr}(k,n)$ в $P^{C_n^k}$.
c) Докажите, что это отображение является вложением.