Листок 2. Алгебра гладких функций

Анализ на многообразиях 2016, **срок сдачи — 14.11.2016**

Пусть M — гладкое многообразие. Обозначим за $C(M)$ кольцо гладких функций на M.

2◇1 Есть ли в $C(M)$
a) делители нуля;
b) нильпотентные элементы;
c) идемпотентные элементы.

Пусть $p \in M$. Обозначим за $I_p \subset C(M)$ подмножество функций, обращающихся в ноль в точке p.

2◇2 a) Докажите, что I_p является идеалом $C(M)$.
b) Чему изоморфно факторкольцо $C(M)/I_p$?
c) Докажите, что I_p является максимальным идеалом.

2◇3 Является ли I_p главным идеалом?
Подсказка: ответ зависит от размерности M.

2◇4 Чему изоморфно факторкольцо $C(M)/I$ для
a) $I = I_p \cap I_q$;
b) $I = I_p \cdot I_q$, $p \neq q$;
c) $I = I_p + I_q$?

2◇5 Постройте естественный изоморфизм между векторными пространствами $I_p/(I_p)^2$ и $(T_pM)^*$.

2◇6 Вычислите размерность пространства $(I_p)^k/(I_p)^{k+1}$.

2◇7 Пусть $I \subset C(M)$ — собственный (отличный от $C(M)$) идеал.
a) Докажите, что всякая $f \in I$ обращается в ноль в некоторой точке M.
b) Пусть M компактно. Докажите, что найдётся такая точка $p \in M$, что всякая $f \in I$ обращается в ноль в p.
c) Выведите отсюда, что всякий максимальный идеал $C(M)$ имеет вид I_p для некоторой $p \in M$.

Тем самым, максимальные идеалы $C(M)$ однозначно соответствуют точкам многообразия.

2◇8* Как в терминах $C(M)$ определить топологию на M, то есть какие множества максимальных идеалов соответствуют открытым подмножествам M?
Подсказка: проще определить замкнутые подмножества.

Пусть $\phi : M \to N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Определим отображение $\phi^* : C(N) \to C(M)$, переводящее $f \in C(N)$ в $f \circ \phi \in C(M)$.

2◇9 a) Докажите, что ϕ^* является *отображением алгебр*, то есть одновременно гомоморфизмом колец и линейным отображением векторных пространств над $\mathbb{R}$.
b*) Докажите, что всякое отображение алгебр из $C(N)$ в $C(M)$, переводящее $1 \in C(N)$ в $1 \in C(M)$ совпадает с ϕ^* для некоторого гладкого ϕ.
c*) Можно ли в этом утверждении отказаться от условия сохранения единицы?

Пусть ξ — векторное поле на M. Сопоставим ему отображение $\partial_\xi : C(M) \to C(M)$, определяемое так: значение $\partial_\xi(f)$ в точке p равно производной f в точке p вдоль вектора $\xi(p)$.

2◇10 a) Докажите, что ∂_ξ является *дифференцированием алгебры* $C(M)$, то есть линейным отображением, удовлетворяющим *правилу Лейбница* $\partial_\xi(fg) = \partial_\xi(f)g + f\partial_\xi(g)$.
b*) Докажите, что всякое дифференцирование алгебры $C(M)$ совпадает с ∂_ξ для некоторого ξ.