1 Вводная лекция

2 Квантование: частицы и струны

3 Двумерные теории бозонов и фермионов

4 Операторный формализм для скалярного поля

5 Тензор энергии-импульса и примарные операторы

5.1 Тензор энергии-импульса в теории скалярного поля

Для действия свободного скалярного поля мы давно уже определили тензор энергии-импульса

$$t_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\delta S[X,g]}{\delta g^{\alpha\beta}} = -\tfrac{1}{2}\left(\partial_\alpha X\partial_\beta X - \tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\alpha'\beta'}\partial_{\alpha'}X\partial_{\beta'}X\right) \tag{5.1}$$

который является симметричным тензором ранга 2 и сохраняется на уравнениях движения свободной скалярной теории $\partial^\alpha\partial_\alpha X = 0$

$$\nabla^\alpha t_{\alpha\beta} = 0 \tag{5.2}$$

Особенно просто это выглядит в комплексных координатах для конформной метрики

$$ds^2 = \rho dz d\bar{z} = e^\varphi dz d\bar{z} \tag{5.3}$$

где условие ковариантного сохранения (5.2) принимает вид

$$\partial_{\bar{z}} t_{zz} + \rho\partial_z(\rho^{-1}t_{z\bar{z}}) = 0 \tag{5.4}$$

вместе с комплексно-сопряженным уравнением, и для конформной теории (5.1) в силу $t_{z\bar{z}} = 0$ сводится к уравнению голоморфности

$$\partial_{\bar{z}} t_{zz} = 0, \qquad \partial_z t_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \tag{5.5}$$

на голоморфные токи спина 2, элементарно следующие из $\bar{\partial}\partial X = 0$, т.е. голоморфности производной ∂X.

Из формулы (5.1) в комплексных координатах также следует, что

$$t_{zz} = -\tfrac{1}{2}(\partial X)^2, \qquad t_{\bar{z}\bar{z}} = -\tfrac{1}{2}(\bar{\partial} X)^2, \qquad t_{z\bar{z}} = 0 \tag{5.6}$$

и это является классическим аналогом уже операторных формул

$$T = T_{zz} = -\tfrac{1}{2} :(\partial X)^2:, \qquad \bar{T} = T_{\bar{z}\bar{z}} = -\tfrac{1}{2} :(\bar{\partial} X)^2: \tag{5.7}$$

мы уже использовали на прошлой лекции - основная разница в нормальном упорядочении *составных операторов*.

Поскольку тензор энергии-импульса (5.1) является откликом действия на произвольную вариацию метрики, то на его компоненты в конформной калибровке можно также смотреть как на отклик действия на единственно возможные остаточные преобразования метрики - голоморфные замены координат. Буквально следует проверить, что для действия

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2z \partial_\alpha X \partial_\alpha X = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \partial X \bar{\partial} X \tag{5.8}$$

при преобразовании $\delta_\epsilon X = \epsilon(z,\bar{z})\partial X$ верно, что

$$\delta_\epsilon S = -\frac{1}{\pi} \int d^2z \; \bar{\partial}\epsilon \; T \tag{5.9}$$

где $T = -\frac{1}{2}(\partial X)^2$ является голоморфным током спина 2 [1]. Заметим, что хотя тензор энергии импульса генерирует голоморфные замены $z \mapsto z + \epsilon(z)$ при выводе последней формулы надо считать, что $\epsilon = \epsilon(z,\bar{z})$.

Последнее замечание состоит в том, что в теории свободного скалярного поля

$$\begin{aligned} J(z) &= i\partial X = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha_n}{z^{n+1}} \\ T(z) &= \tfrac{1}{2} :J^2(z): = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}} \end{aligned} \tag{5.10}$$

дает явное представление для генераторов алгебры Вирасоро, действующих в пространстве Фока

$$L_n = \tfrac{1}{2} \sum_{k+l=n} :\alpha_k \alpha_l: \tag{5.11}$$

Нормальное упорядочение нетривиально лишь в случае генератора

$$L_0 = \tfrac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n>0} \alpha_{-n}\alpha_n \tag{5.12}$$

определенного с точностью до, вообще говоря, расходящейся константы

$$\tfrac{1}{2}\sum_{k>0} [\alpha_k, \alpha_{-k}] = \tfrac{1}{2}\sum_{k>0} k = \tfrac{1}{2}\zeta(1) = -\frac{1}{24} \tag{5.13}$$

[1] Мы будем пользоваться естественными (нормальными и аномальными) размерностями $(\Delta, \bar{\Delta})$ относительно голоморфных и антиголоморфных преобразований по отдельности. При этом их сумма $\Delta + \bar{\Delta}$ является масштабной размерностью, а разница $\Delta - \bar{\Delta}$ называется спином (почему?).

поэтому во многих формулах возникает комбинация $L_0 - \frac{c}{24}$. Например, если считать оператор L_0 аналогом гамильтониана (почему?), то оказывается, что правильно вычислять след по пространству Фока

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr} q^{L_0 - c/24} = q^{-1/24} \mathrm{Tr} q^{L_0} = q^{-1/24} \prod_{n>0} \mathrm{Tr} q^{\alpha_{-n}\alpha_n} = q^{-1/24} \prod_{n>0} \left(1 + q^n + q^{2n} + \ldots\right) = \\
= \frac{1}{q^{1/24} \prod_{n>0}(1-q^n)} = \frac{1}{\eta(q)}
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

когда в правой части возникает функция Дедекинда $\eta(q) = q^{1/24} \prod_{n>0}(1-q^n)$.

5.2 Составные операторы

Мы уже использовали составной операторы (5.7), который уже определен лишь с помощью нормального упорядочения. Аналогичные проблемы возникают и при определении других составных операторов.

В качестве базового примера рассмотрим упорядоченную экспоненту

$$
V_p(z, \bar{z}) =: \exp(ipX(z, \bar{z})) : \tag{5.15}
$$

от скалярного поля. Разница между упорядоченой и неупорядоченой экспонентой легко определеть при введении ультрафиолетового обрезания

$$
\begin{aligned}
\exp(ipX(z,\bar{z})) = 1 + ipX(z,\bar{z}) + \frac{(ip)^2}{2} X(z,\bar{z})^2 + \ldots = \\
= 1 + :ipX(z,\bar{z}): + ip\langle X(z,\bar{z})\rangle + :\frac{(ip)^2}{2} X(z,\bar{z})^2: + \frac{(ip)^2}{2}\langle X(z,\bar{z})^2\rangle + \ldots
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

коррелятора в совпадающих точках

$$
\langle X(z,\bar{z})^2 \rangle \underset{\mathrm{def}}{=} -\log|z-z'|^2\big|_{z-z'=\epsilon} = -\log \epsilon^2 \tag{5.17}
$$

Таким образом получается, что

$$
\begin{aligned}
\exp(ipX(z,\bar{z})) =: \exp(ipX(z,\bar{z})) : \left(1 + \frac{p^2}{2}\log\epsilon^2 + \ldots\right) = \\
=: \exp(ipX(z,\bar{z})) : \epsilon^{p^2}
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

нормально упорядоченная экспонента отличается от неупорядоченной на сингулярный фактор ϵ^{p^2}. Ровно такой же фактор мы получали вычисляя функциональный интеграл, поэтому теперь можно утверждать, что корреляционная функция

$$
\langle \prod_j \exp(ip_j X(z_j, \bar{z}_j)) \rangle = \langle 0 | \prod_j : \exp(ip_j X(z_j, \bar{z}_j)) : |0\rangle = \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{p_i p_j} \tag{5.19}
$$

понимается как вакуумный матричный элемент от упорядоченных экспонент - вершинных операторов

$$\begin{gathered}V_p(z,\bar z) =: \exp(ipX(z,\bar z)) := e^{ipX_0}(z\bar z)^{p\alpha_0}\cdot \\ \cdot \exp\left(p\sum_{n>0}\left(\frac{\alpha_{-n}}{n}z^n + \frac{\bar\alpha_{-n}}{n}\bar z^n\right)\right)\exp\left(-p\sum_{n>0}\left(\frac{\alpha_n}{nz^n} + \frac{\bar\alpha_n}{n\bar z^n}\right)\right)\end{gathered} \tag{5.20}$$

где мы пока можем временно забыть про нулевую моду. Произведение операторов в (5.20) упорядочено, а действие этого оператора на вакуум (в точке $z=0$) дает

$$\lim_{z\to 0} V_p(z,\bar z)|0\rangle = |p\rangle = |p,\varnothing,\varnothing\rangle \tag{5.21}$$

примарное состояние $L_n|p\rangle = \bar L_n|p\rangle = 0$, $n>0$ с импульсом p и вирасоровскими размерностями

$$\begin{gathered}L_0|p\rangle = \left(\tfrac12\alpha_0^2 + \sum_{n>0}\alpha_{-n}\alpha_n\right)|p,\varnothing,\varnothing\rangle = \tfrac12 p^2|p\rangle \\ \bar L_0|p\rangle = \left(\tfrac12\alpha_0^2 + \sum_{n>0}\bar\alpha_{-n}\bar\alpha_n\right)|p,\varnothing,\varnothing\rangle = \tfrac12 p^2|p\rangle\end{gathered} \tag{5.22}$$

что целиком следует из динамики нулевой моды в p-представлении

$$\alpha_0|p\rangle = p|p\rangle, \qquad e^{ikX_0}|p\rangle = |k+p\rangle \tag{5.23}$$

т.к. в этом представлении $X_0 = -i\frac{\partial}{\partial p}$.

Осталось вычислить коррелятор (5.19). Например, для двухточечной функции имеем

$$\begin{gathered}\langle V_p(z,\bar z)V_{-p}(z',\bar z')\rangle = \exp\left(p^2\langle X(z,\bar z)X(z',\bar z')\rangle\right) = \\ = \exp\left(-p^2\log|z-z'|^2\right) = \frac{1}{(z-z')^{p^2}(\bar z-\bar z')^{p^2}}\end{gathered} \tag{5.24}$$

из гауссова интеграла по фундаментальным полям X - координатам струны.

Вспомним теперь замечательные формулы (Кэмпбелла-Хаусдорффа?) для экспонент от некоммутирующих операторов $[A,B]\neq 0$

$$e^{t(A+B)} = e^{tB}L(t), \qquad \dot L = e^{-tB}Ae^{tB}L, \qquad L(t) = P\exp\left(\int_0^t dt' e^{-t'B}Ae^{t'B}\right) \tag{5.25}$$

что (только!) при $[A,B] = \gamma\mathbf{1}$ дает в том числе

$$\begin{gathered}e^{A+B} = e^Be^Ae^{\gamma/2}, \qquad e^{A+B} = e^Ae^Be^{-\gamma/2} \\ e^Ae^B = e^Be^Ae^{\gamma} = e^Be^Ae^{[A,B]}\end{gathered} \tag{5.26}$$

Применим эту формулу к ингредиентам (5.20)

$$e^{-p\frac{\alpha_n}{nz^n}}e^{q\frac{\alpha_{-n}}{n}w^n} = e^{q\frac{\alpha_{-n}}{n}w^n}e^{-p\frac{\alpha_n}{nz^n}}\exp\left(-\frac{pq}{n}\left(\frac{w}{z}\right)^n\right) \tag{5.27}$$

где справа теперь стоит нормально упорядоченной произведение по фоковскому вакууму, поэтому для вакуумного матричного элемента произведения по всем гармоникам получим просто

$$\langle 0|\prod_{n>0}e^{-p\frac{\alpha_n}{nz^n}}\prod_{n>0}e^{q\frac{\alpha_{-n}}{n}w^n}|0\rangle = \prod_{n>0}\exp\left(-\frac{pq}{n}\left(\frac{w}{z}\right)^n\right) = \left(1-\frac{w}{z}\right)^{pq} \tag{5.28}$$

где произведение или логарифмический ряд сходится опять же при $|w| < |z|$. Антиголоморфный вклад получается комплексным сопряжением, и учитывая нулевую моду окончательно получим

$$\begin{gathered}\langle 0| : \exp(ipX(z,\bar z)) :: \exp(-ipX(z',\bar z')) : |0\rangle = \left(1-\frac{w}{z}\right)^{-p^2}\left(1-\frac{\bar w}{\bar z}\right)^{-p^2}\cdot \\ \cdot\langle 0|e^{ipX_0}(z\bar z)^{p\alpha_0}e^{-ipX_0}(z'\bar z')^{-p\alpha_0}|0\rangle = \left(1-\frac{w}{z}\right)^{-p^2}\left(1-\frac{\bar w}{\bar z}\right)^{-p^2}(z\bar z)^{-p^2} = \\ = \frac{1}{(z-z')^{p^2}(\bar z-\bar z')^{p^2}}\end{gathered} \tag{5.29}$$

искомый результат. Точно также можно из формул КХ вывести и более общее соотношение для операторного произведения

$$\begin{gathered}V_p(z,\bar z)\cdot V_q(z',\bar z') = (z-z')^{pq}(\bar z-\bar z')^{pq} : \exp\left(ipX(z,\bar z)+iqX(z',\bar z')\right) := \\ = (z-z')^{pq}(\bar z-\bar z')^{pq}\left(V_{p+q}(z',\bar z')+ip(z-z') : \partial X\ V_{p+q}(z',\bar z') : +c.c+\ldots\right)\end{gathered} \tag{5.30}$$

являющееся очень частным случаем операторного разложения примарных полей в двумерной конформной теории поля.

Вспомним также, что корреляционные функции (5.24), (5.29), при $p^2\in\mathbb{Z}$ допускают голоморфную факторизацию на однозначно глобально определенные функции на сфере, поэтому в этих случаях можно говорить об операторах

$$\mathcal{V}_p(z) =: \exp(ipX(z)) := e^{ipX_0}z^{p\alpha_0}\exp\left(p\sum_{n>0}\left(\frac{\alpha_{-n}}{n}z^n\right)\right)\exp\left(-p\sum_{n>0}\left(\frac{\alpha_n}{nz^n}\right)\right) \tag{5.31}$$

Заметим, что при $p=\pm\sqrt{2}$, корреляционная функция

$$\langle\mathcal{V}_{\sqrt 2}(z)\mathcal{V}_{-\sqrt 2}(z')\rangle = \frac{1}{(z-z')^2} \tag{5.32}$$

"похожа" на корреляционную функцию двух голоморфных токов $i\partial X(z)$

$$\langle i\partial X(z)i\partial X(z')\rangle = \frac{1}{(z-z')^2} \tag{5.33}$$

и именно этот ток и возникает в операторном разложении

$$\mathcal{V}_{\sqrt{2}}(z)\mathcal{V}_{-\sqrt{2}}(z') = \frac{1}{(z-z')^2}\left(1 + i\sqrt{2}(z-z')\partial X + \ldots\right) \tag{5.34}$$

Вопрос: образуют ли операторы $i\partial X(z)$, $\mathcal{V}_{\pm\sqrt{2}}(z)$ замкнутую алгебру, и если да - то какую?

Ответ, который легко проверить в осцилляторном представлении, заключается в том, что экспоненциальные токи $J_\pm(z) = \mathcal{V}_{\pm\sqrt{2}}(z)$ вместе с "обычными" операторами токов $H(z) = i\sqrt{2}\partial X(z)$ образуют алгебру токов Каца-Муди $\widehat{SL(2)}_K$ (проверить!)

$$\begin{aligned} H(z)J_\pm(z') &= \pm\frac{2}{z-z'}J_\pm(z') + \ldots \\ J_+(z)J_-(z') &= \frac{K}{(z-z')^2} + \frac{H(z')}{z-z'} + \ldots \\ H(z)H(z') &= \frac{2K}{(z-z')^2} + \ldots \end{aligned} \tag{5.35}$$

при $K = 1$. Эти операторные разложения эквивалентны коммутационным соотношениям

$$\left[H_n, J^\pm_m\right] = \pm 2J^\pm_{n+m}, \qquad \left[J^+_n, J^-_m\right] = H_{n+m} + Kn\delta_{n+m,0}, \qquad [H_n, H_m] = 2Kn\delta_{n+m,0} \tag{5.36}$$

для токовых мод

$$J_\pm(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{J^\pm_n}{z^{n+1}}, \qquad H(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{H_n}{z^{n+1}} \tag{5.37}$$

Наконец, вспомним что при $p = \pm 1$, корреляционная функция

$$\langle \mathcal{V}_1(z)\mathcal{V}_{-1}(z')\rangle = \frac{1}{z-z'} \tag{5.38}$$

совпадает с корреляционной функцией двух голоморфных фермионов

$$\langle \tilde{\psi}(z)\psi(z')\rangle = \frac{1}{z-z'} \tag{5.39}$$

с действием первого порядка $S = \frac{1}{\pi}\int_\Sigma \tilde{\psi}\bar{\partial}\psi$. Конечно этого пока мало, чтобы говорить о "похожести" теорий - как минимум следует это проверить для многоточечных корреляционных функций, а также уточнить понятие "схожести". Однако сразу очевидно, что предполагаемая "похожесть" физически совершенно нетривиальна, поскольку мы сравниваем корреляционные функции *фундаментальных* полей в теории фермионов (с "исконной фермионной размерностью" $\Delta = \frac{1}{2}$) с корреляционными функциями *составных операторов* в бозонной теории, где эта размерность аномальная, т.е. приобретенная за счет квантовых эффектов.

5.3 Конформная симметрия

Операторное разложение генерирует закон преобразования полей при бесконечно-малом координатном преобразовании $z \to z - \epsilon(z)$. Например для фундаментального поля - голоморфного тока $J = i\partial X$ единичной размерности и спина $(\Delta, \bar{\Delta}) = (1, 0)$

$$\delta_\epsilon J(z) = \oint_{z \frown w} \frac{dw}{2\pi i} \epsilon(w) T(w) J(z) = \epsilon'(z) J(z) + \epsilon(z) J'(z) \tag{5.40}$$

т.е. ток преобразуется при голоморфных заменах координат как поле единичной размерности, т.е. инвариантом является $J(z)dz$, а генератором преобразования - ровно в указанном выше смысле - тензор энергии-импульса. Для (примарного) поля с произвольными размерностями $(\Delta, \bar{\Delta})$ аналогичный закон преобразования следует из операторных разложений

$$\begin{aligned} T(z)\Phi(z', \bar{z}') &= \frac{\Delta}{(z - z')^2} \Phi(z', \bar{z}') + \frac{1}{z - z'} \partial \Phi(z', \bar{z}') + \ldots \\ \bar{T}(\bar{z})\Phi(z', \bar{z}') &= \frac{\bar{\Delta}}{(\bar{z} - \bar{z}')^2} \Phi(z', \bar{z}') + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}'} \bar{\partial} \Phi(z', \bar{z}') + \ldots \end{aligned} \tag{5.41}$$

с генераторами голоморфной и антиголоморфной конформной симметрий. Отсюда прямой подстановкой получаем, например, для голоморфного сектора

$$\delta_\epsilon \Phi(z, \bar{z}) = \oint_{z \frown w} \frac{dw}{2\pi i} \epsilon(w) T(w) \Phi(z, \bar{z}) = \Delta \epsilon'(z) \Phi(z, \bar{z}) + \epsilon(z) \partial \Phi(z, \bar{z}) \tag{5.42}$$

что естественным образом отвечает инвариантности при голоморфных заменах координат величин $\Phi(z, \bar{z}) dz^{\Delta} d\bar{z}^{\bar{\Delta}}$. В квантовой теории (аномальные!) размерности $(\Delta, \bar{\Delta})$ не обязаны быть целыми, и задача двумерной конформной теории - вычислить эти размерности из теории представлений алгебры Вирасоро.

В теории свободного скалярного поля примарными полями являются

$$V_\alpha(z, \bar{z}) =: \exp(i\alpha X(z, \bar{z})) : \tag{5.43}$$

конформные размерности $\Delta_\alpha = \bar{\Delta}_\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2 = \Delta_{-\alpha} = \bar{\Delta}_{-\alpha}$ которых мы уже определили из двухточечной корреляционной функции

$$\begin{aligned} \langle V_\alpha(z, \bar{z}) V_{-\alpha}(z', \bar{z}') \rangle &= \exp\left(\alpha^2 \langle X(z, \bar{z}) X(z', \bar{z}') \rangle\right) = \\ &= \exp\left(-\alpha^2 \log |z - z'|^2\right) = \frac{1}{(z - z')^{\alpha^2} (\bar{z} - \bar{z}')^{\alpha^2}} \end{aligned} \tag{5.44}$$

но, естественно, можем вычислить и из операторного разложения с помощью теоремы Вика. Формулы (5.41) естественным образом согласованы и с нашими рассуждениями про соответствия между вершинными операторами и состояниями

$$\begin{gathered} V_p(0,0)|0\rangle = |p\rangle, \quad L_n|p\rangle = 0, \quad n > 0 \\ L_0|p\rangle = \tfrac{1}{2}p^2|p\rangle = \Delta_p|p\rangle \end{gathered} \tag{5.45}$$

т.е.

$$\lim_{z\to 0} T(z)|p\rangle = \lim_{z\to 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}|p\rangle = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\Delta}{z^2}+\frac{L_{-1}}{z}+\mathrm{reg}\right)|p\rangle \tag{5.46}$$

или

$$\lim_{z\to 0} T(z)V_p(0) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\Delta_p V_p(0)}{z^2}+\frac{\partial V_p(0)}{z}+\mathrm{reg}\right) \tag{5.47}$$

откуда сразу следует, что L_{-1} действует как производная по z.

Наконец, преобразование при голоморфных заменах координат

$$\delta_\epsilon T(z) = 2\epsilon'(z)T(z)+\epsilon(z)\partial T(z)+\frac{c}{12}\epsilon'''(z) \tag{5.48}$$

самого тензора энергии-импульса $T(z)$ следует из операторного разложения

$$T(z)T(z') = \frac{c}{2(z-z')^4}+\frac{2T(z')}{(z-z')^2}+\frac{\partial T(z')}{z-z'}+\dots \tag{5.49}$$

Действительно

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon T(z) = \oint_{z\curvearrowleft w}\frac{dw}{2\pi i}\epsilon(w)T(w)T(z) = \\ = \oint_{z\curvearrowleft w}\frac{dw}{2\pi i}\epsilon(w)\left(\frac{c}{2(w-z)^4}+\frac{2T(z)}{(w-z)^2}+\frac{\partial T(z)}{w-z}+\dots\right) = \\ = \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{6}\epsilon'''(z)+2\epsilon'(z)T(z)+\epsilon(z)\partial T(z)\end{aligned} \tag{5.50}$$

т.е. - по сравнению с примарным полем - лишний полюс 4-го порядка дает аномальный вклад в закон преобразования тензора - конформную аномалию [2]. Из формул (5.41) и определений генераторов алгебры Вирасоро $T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{L_n}{z^{n+2}}$ можно также получить формулы БПЗ коммутаторов с примарными полями

$$[L_n,\Phi(z)] = z^{n+1}\frac{d\Phi(z)}{dz}+(n+1)z^n\Delta\Phi(z) \tag{5.51}$$

[2] Вопрос: что означает, что при $\epsilon'''(z)=0$ аномалия пропадает?