Семинар 7

Базисы и реперы

1. Постройте в пространстве многочленов степени $\leq m$ из $\mathbf{k}[x]$ такой базис, в котором координатами многочлена f являются значения f и его первых m производных в данной точке $a_0 \in \mathbf{k}$. (Разложение многочлена по такому базису называется *формулой Тейлора*.)

2. В евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (x_1, x_2, x_3) рассмотрим ортонормированный репер, состоящий из векторов $\mathbf{i} = OA$, $\mathbf{j} = OB$, $\mathbf{k} = OC$, где $O = (0, 0, 0)$, а точки A, B и C имеют аффинные координаты $A = (a_1, a_2, a_3)$, $= (b_1, b_2, b_3)$ и $C = (c_1, c_2, c_3)$ соответственно. Тогда ортогональные проекции A_1, B_1 и C_1 точек A, B, C на координатную плоскость $Ox_1x_2 = \{x_3 = 0\}$ имеют координаты a_1, a_2, b_1, b_2 и c_1, c_c соответственно. Рассмотрим комплексные числа $z_1 = a_1 + a_2 i$, $z_2 = b_1 + b_2 i$ и $z_3 = c_1 + c_2 i$. Докажите, что $z_1^2 + z_2^2 i + z_3^2 = 0$.

Линейные операторы

3. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ найдите матрицу (в стандартном базисе) оператора ортогонального проектирования на подпространство:

а) порожденное вектором $a = (1, 1, 1)$;

б) заданное уравнением $2x + y - z = 0$.

В обоих случаях найдите ядро этого оператора.

4. Вектор $0 \neq v \in V$ называется *собственным вектором* линейного оператора f, если $\lambda \in \mathbf{k}$ $f(v) = \lambda v$. Скаляр λ называется *собственным числом* линейного оператора f. Для этого λ подмножество $V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$ пространства V называется *собственным подпространством* в V, соответствующим собственному числу λ.

а) Проверьте, что собственные подпространства линейного оператора являются подпространствами пространства V. Является ли ядро оператора f его собственным подпространством?

б) Пусть V_{λ_1} и V_{λ_2} - собственные подпространства в V, соответствующие двум различным собственным числам λ_1 и λ_2 линейного оператора f. Докажите, что $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$.

5. Пусть e_1, e_2 - базис в V. Зададим линейный оператор f в V равенствами $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = 4e_1$. Найдите собственные числа и собственные подпространства оператора f. Найдите ядро f.

6. Пусть f - ортогональный оператор в евклидовом векторном пространстве V со скалярным произведением $(\ ,\ )$.

а) Какие значения могут принимать собственные числа оператора f?

б) Пусть U_1 и U_2 - собственные подпространства оператора f, соответствующие двум различным собственным числам. Докажите, что $U_1 \perp U_2$, то есть $(u_1, u_2) = 0$ $\forall u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$.