Алгебра-2, листок 1: выпуклость, конусы, многогранники

Ниже все векторные пространства предполагаются вещественными конечномерными.

Определение. Множество в векторном пространстве называется выпуклым, если вместе с каждой парой точек содержит соединяющий их отрезок, и называется конусом, если инвариантно относительно гомотетий с положительным коэффициентом.

Пример 1. Неявным конусом в векторном пространстве V называется пересечение конечного числа полупространств, т.е. множеств, заданных неравенствами $v_i(x) \geqslant 0$, где $v_i \in V^*$ – линейные функции.

Пример 2. Параметрическим (или многогранным) конусом называется множество линейных комбинаций данного конечного набора векторов с неотрицательными коэффициентами.

1. **a)** Покажите, что эти множества – действительно выпуклые конусы.
b) Классифицируйте выпуклые множества на плоскости, содержащие прямую, относительно группы аффинных преобразований плоскости.

Определение. Двойственным к данному конусу C называется конус в двойственном пространстве $\{v \,|\, \forall x \in C \;\; v(x) \geqslant 0\}$.

2. **a)** Замкнутое выпуклое множество отделяется от каждой не содержащейся в нем точки аффинной гиперплоскостью. (Подсказка: возьмите точку B множества, ближайшую к данной точке A, и рассмотрите серединный перпендикуляр к AB.) **b)** Замкнутый выпуклый конус отделяется от каждой не содержащейся в нем точки векторной гиперплоскостью. **c)** Для замкнутого выпуклого конуса C верно равенство $(C^*)^* = C$.

3. **a)** Докажите, что система линейных неравенств $\begin{cases} x_1 + \alpha_i(x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, p \\ -x_1 + \beta_j(x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, q \\ \gamma_k(x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0,\ k = 1, \ldots, r \end{cases}$

равносильна системе линейных неравенств

$$\begin{cases} \alpha_i(x_2, \ldots, x_n) + \beta_j(x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, q \\ \gamma_k(x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0,\ k = 1, \ldots, r, \end{cases}$$

т.е. решения второй системы – в точности такие наборы $(x_2, \ldots, x_n)$, которые можно дополнить до набора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющего первой системе.
b) (Исключение переменных по Фурье–Моцкину) Для каждой системы неравенств на переменные $(x_1, \ldots, x_n)$ постройте равносильную ей систему неравенств на переменные $(x_2, \ldots, x_n)$.
c) Образ каждого неявного конуса при линейном отображении – неявный конус.
d) Параметрический конус является неявным.

4. **a)** Пусть линейные функции $v_1, \ldots, v_k \in V^*$ на векторном пространстве V порождают параметрический конус $C \in V^*$, а неравенства $v_1 \geqslant 0, \ldots, v_k \geqslant 0$ задают неявный конус $\widetilde{C} \subset V$. Тогда конусы C и $\widetilde{C}$ двойственны друг другу. **b)** Неявный конус является параметрическим.

Доказана теорема Минковского–Вейля: неявные и параметрические конусы – одно и то же.

Определения. Назовем выпуклой оболочкой множества минимальное содержащее его выпуклое множество, многогранником – выпуклую оболочку конечного множества, а полиэдром – пересечение конечного числа аффинных полупространств.

5. **a)** Докажите существование выпуклой оболочки. **b)** Докажите, что многогранники и ограниченные полиэдры – одно и то же. **c)** Дайте определение грани многогранника и докажите, что каждая грань является пересечением содержащих ее граней коразмерности 1. **d)** Постройте взаимнооднозначное соответствие между гранями многогранных конусов C и C^*, обращающее включения.

6. **a)** (Лемма Каратеодори) Каждая точка выпуклой оболочки $A \subset \mathbb{R}^n$ содержится в выпуклой оболочке $n+1$ точки из множества A.
b) (Лемма Радона) Множество из $\geqslant (n+2)$ точек в $\mathbb{R}^n$ всегда можно разбить в дизъюнктное объединение двух непустых подмножеств с пересекающимися выпуклыми оболочками.
c) (Теорема Хелли) Если в наборе компактных выпуклых фигур в R^n каждый поднабор из $(n+1)$ фигур имеет непустое пересечение, то и весь набор имеет непустое пересечение.