Алгебра-2, листок 2: симметрические многочлены

1. Вычислите дискриминанты многочленов **a)** $x^n + x^{n-1} + \ldots + 1$, **b)** $\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + 1$, **c)** Эрмита $H_n = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2})$, **d)** Лагерра $H_n = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$, **e)** Чебышева $P_n = 2\cos(n\arccos(x/2))$, **f)**$^{\times}$ циклотомического $\Phi_n(x) = \prod_j (x - \zeta_j)$, где $\zeta_1, \ldots, \zeta_{\varphi(n)}$ – первообразные корни из 1 степени n.

Напомним, что через σ_k обозначается k-й элементарный симметрический многочлен, через h_k – k-й полный симметрический многочлен, а через s_k — k-я ньютоновская степенная сумма: $\sigma_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$; $\quad h_k = \sum_{i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$; $\quad s_k = x_1^k + \cdots + x_n^k$.

2. Докажите следующие детерминантные тождества:

a) $s_k = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (k-1)\sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \ldots & \sigma_1 & 1 \\ k\sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \ldots & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$; **b)** $k! \cdot \sigma_k = \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \ldots & s_1 & 1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \ldots & s_2 & s_1 \end{vmatrix}$.

3. Пусть ω – автоморфизм кольца симметрических многочленов, переводящий σ_k в h_k. Докажите, что он **a)** корректно определен и **b)** является инволюцией. **c)** Получите аналогичные предыдущей задаче детерминантные формулы, связывающие h_k и s_k.

4. **a)** Дайте определение кососимметрического многочлена и докажите, что определитель Вандермонда $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ является таковым.
b) Докажите, что всякий кососимметрический многочлен есть произведение симметрического и $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$.
c) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — симметрический многочлен, равный 0 при $x_i = x_j$. Докажите, что $f(x_1, \ldots, x_n) = \Delta^2 \cdot g(x_1, \ldots, x_n)$, где g — симметрический многочлен.

Определение. *Разбиением числа n* называется набор λ целых неотрицательных чисел $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ и $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = n$.

5. Пусть $p(n)$ — число разбиений числа n. Докажите, что $\prod_{m \geq 0}(1 - t^m)^{-1} = \sum_{n \geq 0} p(n) t^n$.

Определение. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — набор натуральных чисел. Пусть $a_\alpha = \begin{vmatrix} x_1^{\alpha_1} & \ldots & x_n^{\alpha_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{\alpha_n} & \ldots & x_n^{\alpha_n} \end{vmatrix}$.
В частности, если $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$, то a_δ — это определитель Вандермонда.

6. Докажите, что a_α образуют базис в пространстве кососимметрических многочленов.

7. **(Многочлены Шура)** Пусть λ — разбиение. Положим $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = a_{\lambda+\delta}/a_\delta$. Докажите:
a) $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ — целочисленный симметрический многочлен;
b) $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ при всевозможных λ образуют базис векторного пространства симметрических многочленов от $x_1, \ldots, x_n$;
c) Если $\lambda = (1, \ldots, 1)$, то $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sigma_n$;
d) Если $\lambda = (n, 0, \ldots, 0)$, то $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = h_n$.

8. Выпишите явно многочлены Шура при $n = 2$ и $n = 3$ для всевозможных разбиений **a)** числа 3; **b)** числа 4. **c)** Докажите, что $s_\delta = \prod_{i<j}(x_i + x_j)$.

9. $^{\times}$ **(Формулы Коши)** Докажите: **a)** $\prod_{i,j=1}^n (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_\lambda s_\lambda(x_1, x_2, \ldots) s_\lambda(y_1, y_2, \ldots)$;
b) $\prod_{i,j=1}^n (1 + x_i y_j)^{-1} = \sum_\lambda s_\lambda(x_1, x_2, \ldots) s_{\lambda^*}(y_1, y_2, \ldots)$, где λ^* — разбиение, сопряжённое к λ.

10.$^{\times}$ **(Формулы Пьери)** Пусть λ — разбиение (будем представлять его как диаграмму Юнга). Обозначим через $\lambda \otimes k$ (соотв. $\lambda \otimes 1^k$) множество разбиений, полученных из данного добавлением к его диаграмме Юнга k клеточек, из которых никакие две не лежат в одном столбце (соотв. в одной строке). Докажите: **a)** $s_\lambda \sigma_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes 1^k} s_\mu$; $\quad$ **b)** $s_\lambda h_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes k} s_\mu$.

11.$^{\times}$ **(Формулы Якоби–Труди)** Пусть λ — разбиение с не более чем n ненулевыми компонентами. Докажите, что: **a)** $s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i,j \leq n}$; $\quad$ **b)** $s_{\lambda^*} = \det(\sigma_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i,j \leq n}$.