

Алгебра, семинар 30 сентября

1.
 - a) Перечислите все нормальные подгруппы в группе D_4 . Найдите фактор-группы.
 - b) Приведите пример двух неизоморфных групп G_1 и G_2 и их нормальных подгрупп $H_1 \subset G_1$ и $H_2 \subset G_2$, таких что $H_1 \cong H_2$ и $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$.
 - c) При каких значениях n группы $D_n \times \mathbb{Z}_2$ и D_{2n} изоморфны?
 - d) Докажите, что при $m > 2$ группы $D_n \times \mathbb{Z}_m$ и D_{mn} никогда не изоморфны.
 - e) Докажите, что любая группа порядка $2p$, где p – нечетное простое число, либо является циклической, либо группой диэдра.
 2. Докажите, что группа $\text{Aut}(G)$ нетривиальна, если G **a)** неабелева, **b)** абелева с элементом порядка больше 2, **c)** не равна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
 3. Опишите внутренние и внешние автоморфизмы группы D_n .
- ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для конечных групп G и H и гомоморфизма $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(G)$ определим полупрямое произведение $G \rtimes_\varphi H$ как декартово произведение $(G \times H)$ с операцией $(g_1, h_1) \star (g_2, h_2) = (g_1 \varphi(h_1)(g_2), h_1 h_2)$.
4.
 - a) Покажите, что если нормальная подгруппа $G \trianglelefteq X$ и подгруппа $H \subset X$ таковы, что $X = GH$ и $G \cap H = \{e\}$, то X – полупрямое произведение G и H относительно действия H на G сопряжениями.
 - b) Покажите, что группа Q_8 не является полупрямым произведением своего центра $\{\pm 1\}$ с какой-либо другой подгруппой.
 5.
 - a) Покажите, что в $G \rtimes_\varphi H$ есть нормальная подгруппа, изоморфная G , и есть подгруппа, изоморфная H ,
 - b) но не обязательно есть нормальная подгруппа, изоморфная H .
 6.
 - a) Представьте группу изометрий евклидовой плоскости как полупрямое произведение групп \mathbb{R}^2 и $O_2(\mathbb{R})$.
 - b) Задайте образующими и соотношениями группу движений, сохраняющих правильное шестиугольное замощение плоскости, и выразите ее элементы через стандартные образующие \mathbb{R}^2 и $O_2(\mathbb{R})$.
 7. Представьте группу D_6 двумя разными способами в виде полупрямого произведения двух групп. (“разными” означает, что хотя бы одна пара сомножителей не изоморфна друг другу.)
 8. Существуют ли некоммутативные группы порядков **a)** 21; **b)** 27; **c)** 12, не изоморфные A_4 и D_6 , **d)** p^2 , **e)** p^3 для произвольного простого p ?
 9. Приведите пример неабелевой непростой конечной группы, которую нельзя представить в виде прямого или полупрямого произведения.