Алгебра, семинар 9 сентября

1. Рассмотрим многочлен $F_t = (1+x_1t)\dots(1+x_nt)$ от переменных $x_1,\dots,x_n,t$. Проверьте, что коэффициенты многочлена F_t совпадают с элементарными симметрическими функциями $e_i(x_1,\dots,x_n)$ для $i=1,\dots,n$.

a) Определим $s_k(x_1,\dots,x_n) = x_1^k+\dots+x_n^k$. Докажите, что

$$\frac{d}{dt}(\ln F_t) = -\sum_{k>0}(-1)^{k-1}s_k(x_1,\dots,x_n)t^{k-1}.$$

b) Докажите тождества Ньютона:

$$ke_k(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}e_{k-i}(x_1,\dots,x_n)s_i(x_1,\dots,x_n)$$

(мы полагаем $e_0=1$, и $e_k=0$ при $k>n$).

c) Определим $h_i(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\leqslant k_1\leqslant k_2\leqslant\dots\leqslant k_i\leqslant n} x_{k_1}x_{k_2}\dots x_{k_i}$, и $h_0=1$. Докажите, что

$$F_t^{-1} = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k h_k(x_1,\dots,x_n)t^k.$$

d) Докажите тождество $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i e_i(x_1,\dots,x_n)h_{k-i}(x_1,\dots,x_n)=0$ при $k>0$.

2. Сколько различных мономов можно получить переставляя номера переменных в мономе $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_m^{\lambda_m}$, где $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\dots\geq\lambda_m$?

3. Пусть σ – перестановка с цикловым типом $p_1\geqslant p_2\geqslant\dots\geqslant p_k$. Пусть m_i – число индексов s, таких что $p_s=i$. Докажите, что порядок централизатора σ (подгруппы перестановок, коммутирующих с σ равен $\prod_i i^{m_i}m_i!$.

4. Используя выражение производящих функций для элементарных симметрических функций, полных симметрических функций и сумм Ньютона, напишите явное выражение для **a)** h_k через e_i; **b)** $h_{n+1}(x_1,\dots,x_n)$ через $h_i(x_1,\dots,x_n)$ для $i=1,\dots,n$; **c)** e_k через h_i; **d)** s_i через e_k; **e)** s_i через h_k; **f)** h_k через s_i; **g)** e_k через s_i.

5. Многочлен $\Phi_n(x) = \prod_{\substack{0\leqslant k<n\\(k,n)=1}}(x-\exp(2\pi i\frac{k}{n}))$ называется круговым многочленом.

a) Докажите, что многочлен $\Phi_n(x)$ имеет целые коэффициенты. **b)** Докажите, что любой симметрический многочлен с целыми коэффициентами от примитивных корней из единицы фиксированной степени n является целым числом. **c)** Вычислите сумму k-ых степеней нетривиальных корней степени p из единицы, для простого числа p.