Алгебра, семинар 2 сентября

1. Выразите через элементарные симметрические функции те из нижеследующих многочленов, которые симметричны: **a)** $x_1^2+\ldots+x_n^2$, **b)** $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1$, **c)** $x_1^3+\ldots+x_n^3$, **d)** $\sum_{i\neq j\leqslant n} x_i^2x_j$ при $n=3$ и **e)** произвольном n.

2. Пусть x_i – комплексные корни многочлена **a)** $2x^3+3x^2-1$ или **b)** x^4-x^2+x+1. Найдите $\sum_i x_i^n$ при $n=1,2,3$ и -1.

3. Пусть $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0\\ 1 & a & 1 & 0\\ 0 & 1 & a & 1\\ 0 & 0 & 1 & a\end{pmatrix}$. Найдите след матриц **a)** A^2, **b)** A^3, **c)** A^{-1}, **d)** A^{-2}.

4. Найдите многочлен третьей степени, корни которого равны
a) кубам корней многочлена x^3-x-1,
b) четвертым степеням корней $2x^3-x^2+2$,
c)$^\times$ критическим значениям многочлена x^4-x^2+x+1.

5. Пусть $x_1,\ldots,x_n$ – корни многочлена $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$. Выразите элементарные симметрические функции от $x_2,\ldots,x_n$ через x_1 и коэффициенты $a_1,\ldots,a_n$.

6. Пусть $p(n,k)$ число линейно независимых симметрических многочленов степени n от k переменных.
a) Докажите, что при $k>n$ получаем $p(n,k)=p(n,n)$.
b) Докажите, что $p(n,k)$ равно числу разбиений числа n в виде суммы k целых неотрицательных чисел.
c) Напишите производящую функцию $f_k(t):=\sum_{n>0}p(n,k)t^n$ в виде отношения двух многочленов.
d) Вычислите $p(n,2)$ и $p(5,5)$.