Теория струн и КТП 2016

Модуль 1. Контрольная работа

Решать все задачи не обязательно: выберите те, которые решить получается, остальные можно будет сдать потом. В простых счётных задачах ответ можно писать без вычислений, дабы не тратить время: правильный будет засчитан, неправильный не будет.

1. Напишите уравнения движения для систем с лагранжианами

$$L_1 = -m\sqrt{\dot{x}_0^2 - \sum_i \dot{x}_i^2}\,, \quad L_2 = -m\sqrt{1 - \sum_i \dot{x}_i^2}\,, \quad L_3 = \Big(\dot{x}_0^2 - \sum_i \dot{x}_i^2\Big)e^{-1} + Te$$

   (здесь T, m – константы, а e – динамическая переменная) и сравните их решения.

2. Найдите асимптотику пропагатора свободной частицы

$$K(\vec{X}) = \int_0^\infty dT\, \frac{e^{-\frac{|\vec{X}|^2}{2T} - \frac{m^2}{2}T}}{T^{D/2}}$$

   на больших и малых расстояниях $|\vec{X}|^2 = \sum_{\mu=1}^D X_\mu^2$ в D-мерном евклидовом пространстве в случае а) массивной частицы $m^2 > 0$, б) безмассовой частицы $m^2 = 0$.

3. Вычислите интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}x_i x_j\Big)$$

   для матриц а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, в) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5i \\ 5i & -4 \end{pmatrix}$.

4. Вычислите интеграл ($\operatorname{Re} A > 0$)

$$I_N = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots dx_N\, \delta(x_1 + \ldots + x_N) \exp\Big(-A\sum_{j=1}^{N}(x_j - x_{j-1})^2\Big)\,, \qquad j + N \equiv j$$

   В задачах 5–7 $J(z) = i\partial X(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} z^{-k-1}a_k$ – голоморфный ток в теории с действием $\frac{1}{2}\int(\partial_\alpha X)^2 d^2z$. Операторы a_k удовлетворяют алгебре Гейзенберга $[a_n,\, a_m] = n\,\delta_{n+m,0}$. $:\!(\ldots)\!:$ означает нормальное упорядочение – операторы уничтожения направо, рождения налево.

5. Покажите, что

$$:\!J^2(z)\!: = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_z} \frac{d\zeta}{\zeta - z}\, \mathcal{R}J(\zeta)J(z)$$

где $\mathcal{C}_z$ – маленький контур, охватывающий точку z. Оператор $\mathcal{R}$ означает радиальное упорядочение: т.е., $\mathcal{R}J(z_1)J(z_2) = J(z_>)J(z_<)$, где $z_>$ и $z_<$ — большее и меньшее из z_1 и z_2, соответственно.

Что будет стоять в левой части вместо $:J^2(z):$, если в правой написать

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_z} \frac{d\zeta}{\zeta - z}\,\mathcal{R}A(\zeta)B(z)\ ?$$

При этом $A(z)$ и $B(z)$ — произвольные операторы, об операторном операторном разложении которых ничего неизвестно. Предложенная для вычисления величина называется обобщённым нормальным упорядочением и часто обозначается как $(A(z)B(z))$; вопрос о том, как оно явно выражается в терминах мод. Также подумайте, коммутативно ли и ассоциативно ли оно.

6. Найдите вакуумные средние а) $\langle J(z_1)J(z_2)J(z_3)J(z_4)\rangle$, б) $\langle W(z_1)W(z_2)\rangle$, где $W(z) = \frac{i}{3}:J^3(z):$.

7. В теории свободного скалярного поля с тензором энергии-импульса Фейгина-Фукса
$$T(z) = \frac{1}{2}:J^2(z): + \alpha\partial J(z)$$
   а) получите выражения для генераторов алгебры Вирасоро L_n через генераторы алгебры Гейзенберга a_k;

   б) найдите центральный заряд алгебры Вирасоро.

8. В двумерных теориях поля удобно пользоваться комплексными координатами $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Выразите компоненты тензора энергии-импульса $T_{zz}, T_{\bar{z}\bar{z}}, T_{z\bar{z}}, T_{\bar{z}z}$ в координатах $z, \bar{z}$ через его компоненты $T_{xx}, T_{yy}, T_{xy}, T_{yx}$ в исходных координатах.

9. Вычислите 4-точечный коррелятор $\langle V_{\alpha_1}(z_1)V_{\alpha_2}(z_2)V_{\alpha_3}(z_3)V_{\alpha_4}(z_4)\rangle$ вертексных операторов $V_\alpha(z) = :e^{i\alpha X(z)}:$ при $\sum_i \alpha_i = 0$, ИЛИ, если сложно, вычислите $< V_\alpha(z_1)V_{-\alpha}(z_2) >$.

10. Считая известным операторное разложение
$$T(z)\Phi_\Delta(w) = \frac{\Delta\Phi_\Delta(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\Phi_\Delta(w)}{z-w} + reg.$$
вычислите операторное разложение $\Phi_\Delta(z)T(w) = \dots$ (в нашем определении операторного разложения $A(z)B(w)$ поля в правой части стоят в точке w).

    Если предположить, что $\Delta = 1$ и $\oint\limits_{z=0} \Phi_\Delta(z)dz = (\Phi_\Delta)_0$ определён, что можно сказать о коммутаторе $[(\Phi_\Delta)_0, L_k] =?$. Какие примеры $\Phi_\Delta(z)$ с $\Delta = 1$ вы знаете?

11. Найдите структуру (с точностью до численных коэффициентов) разложения в ряд пропагатора гармонического осциллятора $K(0,0|T) \sim \frac{1}{\sqrt{\sinh T}}$ по e^{-T} в пределе $T \to \infty$. Что можно сказать о спектре гамильтониана осциллятора по этому разложению, и почему?