Задачи в листках, помеченные буквой “B”, являются бонусными. За их решение будут начисляться дополнительные баллы.

3.1. Докажите полноту пространств ℓ^p (где $1 \leqslant p \leqslant +\infty$) и c_0.

3.2. Докажите, что пространство $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ неполно для любого $p \in [1, +\infty]$, и что пространство $(\ell^p, \|\cdot\|_q)$ неполно при $q > p$. Опишите пополнения этих пространств.

3.3. Докажите, что счетномерное нормированное пространство не может быть полным.

3.4. При $p < \infty$ предъявите фундаментальную последовательность в нормированном пространстве $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$, не имеющую предела. Опишите пополнение этого пространства.

3.5. Докажите полноту пространства $C^n[a,b]$ относительно нормы $\|f\| = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \|f^{(k)}\|_\infty$. Полно ли это пространство относительно равномерной нормы? Если нет, то опишите его пополнение.

3.6. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Докажите, что пространство $L^\infty(X, \mu)$ полно.

Пространства $L^p(X, \mu)$ полны для всех $p \in [1, +\infty]$. Для $p = 1$ и/или $p = 2$ это обычно доказывается в курсе анализа (при обсуждении интеграла Лебега). Для произвольного $p < +\infty$ доказательство аналогично случаю $p = 1$.

3.7. Пусть $K \subset C([a,b], \mathbb{R})$ — компактное множество. Докажите непрерывность функций $x \mapsto \sup_{f \in K} f(x)$ и $x \mapsto \inf_{f \in K} f(x)$. Верно ли это утверждение, если K ограничено, но не компактно?

3.8. Докажите, что подмножество $S \subset \ell^p$ (где $1 \leqslant p < \infty$) относительно компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и

$$\sup_{x \in S} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

(т.е. нормы «хвостов» последовательностей из S равномерно стремятся к нулю).

3.9. Докажите, что подмножество $S \subset c_0$ относительно компактно тогда и только тогда, когда существует такой элемент $y \in c_0$, что $|x_n| \leqslant |y_n|$ для всех $x \in S$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Верно ли аналогичное утверждение для ℓ^p?

3.10-B. Докажите, что подмножество $S \subset L^p(\mathbb{R})$ (где $1 \leqslant p < \infty$) относительно компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и удовлетворяет следующим условиям:

$$\sup_{f \in S} \int_{\mathbb{R} \setminus [-n,n]} |f(t)|^p \, dt \to 0 \quad \text{при } n \to \infty;$$

$$\sup_{f \in S} \int_{\mathbb{R}} |f(t+h) - f(t)|^p \, dt \to 0 \quad \text{при } h \to 0.$$

Указание (достаточность). Функции $f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) \, dt$ непрерывны и сходятся к f равномерно на S. С другой стороны, при фиксированном h семейство $\{f_h : f \in S\}$ равностепенно непрерывно на каждом отрезке.

3.11 (*необходимость компактности в теореме Шаудера*)**.** Приведите пример банахова пространства X и непрерывного отображения $f \colon B \to B$, где B — замкнутый шар в X, не имеющего неподвижных точек.

3.12. Пусть $\Phi \colon [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ — непрерывная ограниченная функция. Докажите, что для каждой функции $\psi \in C[0,1]$ существует функция $x \in C[0,1]$, удовлетворяющая уравнению

$$x(t) = \psi(t) + \int_0^1 \Phi(s, t, x(s)) \, ds \qquad (t \in [0,1]).$$