1 Вводная лекция

2 Квантование: частицы и струны

3 Двумерные теории бозонов и фермионов

4 Операторный формализм для скалярного поля

5 Тензор энергии-импульса и примарные операторы

6 Фермионы и системы первого порядка

6.1 Конформная bc-система

Рассмотрим теперь двумерную конформную свободную теорию грассмановых [1] bc-полей спинов $(j,0)$ и $(1-j,0)$ для полей c и b соответственно с действием первого порядка

$$S = \frac{1}{\pi}\int_{\Sigma} d^2z\; b\bar{\partial}c \tag{6.1}$$

и будем считать поля нормированными так, чтобы их ненулевая корреляционная функция была

$$\langle b(z)c(z')\rangle = \frac{1}{z-z'} = \langle c(z)b(z')\rangle \tag{6.2}$$

являющейся следствием формулы Коши

$$\bar{\partial}\frac{1}{z-z'} = \pi\delta^{(2)}(z-z') \tag{6.3}$$

Как и в случае свободного скалярного поля введем нормальное произведение

$$:b(z)c(z'):= b(z)c(z') - \langle b(z)c(z')\rangle = b(z)c(z') - \frac{1}{z-z'} \tag{6.4}$$

которое уже несингулярно при $z \to z'$.

[1] Можно рассматривать аналогичную теорию первого порядка и для бозонных полей $\frac{1}{\pi}\int_{\Sigma} d^2z\; \beta\bar{\partial}\gamma$, которая является существенно более сложной, чем грассманова bc-система. Такие бозонные $\beta\gamma$-системы первого порядка играют существенную роль в теории десятимерных суперструн и в моделях Весса-Зумино при бозонизации.

Тензор энергии-импульса можно строить разными способами. Мы воспользуемся тем, что голоморфная компонента тензора энергии-импульса $\bar{\partial}T_{bc} = 0$ веса 2 может содержать в свободной теории только два слагаемых

$$T = T_{bc} = \alpha : b\partial c : + \beta : c\partial b : \tag{6.5}$$

коэффициенты при которых можно зафиксировать воспроизводя операторные разложения

$$\begin{aligned} T(z)c(w) &= \frac{j}{(z-w)^2}c(w) + \frac{1}{z-w}\partial c(w) + \ldots \\ T(z)b(w) &= \frac{1-j}{(z-w)^2}b(w) + \frac{1}{z-w}\partial b(w) + \ldots \end{aligned} \tag{6.6}$$

говорящие ровно о том, что поля c и b являются примарными с весами $\Delta = j$ и $\Delta = 1 - j$ соответственно. Вычислим, например, первое операторное разложение

$$\begin{aligned} T(z)c(w) &= \alpha : b(z)\partial c(z) : c(w) + \beta : c(z)\partial b(z) : c(w) = \\ &= -\alpha \frac{1}{z-w}\partial c(z) - \beta \frac{1}{(z-w)^2}c(z) + \ldots = \\ &= -\beta \frac{1}{(z-w)^2}c(w) - \frac{\alpha+\beta}{z-w}\partial c(w) + \ldots \end{aligned} \tag{6.7}$$

откуда следует $\beta = -j$, $\alpha + \beta = -1$ или

$$T = (j-1) : b\partial c : - j : c\partial b : \tag{6.8}$$

Нетрудно убедиться, что второе из соотношений (6.6) при этом удовлетворяется автоматически (необходимо убедиться самостоятельно!).

Что касается центрального заряда, то его опять следует искать как самый сингулярный член в операторном разложении

$$\begin{aligned} T(z)T(w) = (j-1)^2 : b(z)\partial c(z) :: b(w)\partial c(w) : + j^2 : c(z)\partial b(z) :: c(w)\partial b(w) : - \\ - j(j-1) : b(z)\partial c(z) :: c(w)\partial b(w) : - j(j-1) : c(z)\partial b(z) :: b(w)\partial c(w) : \end{aligned} \tag{6.9}$$

Самый сингулярный член сводится к произведению попарных корреляционных функций. С учетом антикоммутативности полей получаем

$$\begin{aligned} T(z)T(w) = -(j-1)^2\langle b(z)\partial c(w)\rangle\langle b(w)\partial c(z)\rangle - j^2 : \langle\partial b(z)c(w)\rangle\langle\partial b(w)c(z)\rangle - \\ - j(j-1)\langle b(z)c(w)\rangle\langle\partial b(w)\partial c(z)\rangle - j(j-1)\langle b(w)c(z)\rangle\langle\partial b(z)\partial c(w)\rangle + \ldots = \\ = -(j-1)^2\frac{1}{(z-w)^2}\frac{1}{(w-z)^2} - j^2\frac{-1}{(z-w)^2}\frac{-1}{(w-z)^2} - \\ - j(j-1)\frac{1}{z-w}\frac{-2}{(w-z)^3} - j(j-1)\frac{1}{w-z}\frac{-2}{(z-w)^3} + \ldots = \\ = -\frac{1}{(z-w)^4}\left((j-1)^2 + j^2 + 4j(j-1)\right) + \ldots = -\frac{1}{(z-w)^4}\left(6j^2 - 6j + 1\right) + \ldots \end{aligned} \tag{6.10}$$

откуда следует, что центральный заряд грассмановой bc-системы

$$c_{bc} = -2\left(6j^2 - 6j + 1\right) \tag{6.11}$$

Эта ровно та формула, которая необходима для вычисления (простейшим способом!) конформной аномалии в теории бозонных струн и суперструн, наряду с уже вычисленным центральным зарядом скалярного поля $c = 1$. Её важные частные случаи

- $j = -1$, $1 - j = 2$, $c = -26$ что дает критическую размерность бозонной струны как результат вычисления конформной аномалии в bc-системе, отвечающей духам репараметризаций c (или грассмановым векторным полям) и двойственным им полям b;

- $j = 1 - j = \frac{1}{2}$, $c = 1$: двумерный комплексный фермион Дирака-Вейля, для которого представление алгебры Вирасоро имеет то же значение центрального заряда, что и для (голоморфной части) теории свободных бозонов с тензором энергии-импульса $T = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2$. Эквивалентны ли эти представления?

6.2 Теория двумерных фермионов в операторном формализме

Действие Вейля для двумерных безмассовых комплексных фермионов является частным случаем грассмановой bc-системы с $j = 1 - j = \frac{1}{2}$, т.е.

$$S = \frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2z\ \tilde{\psi}\bar{\partial}\psi \quad (\ \ +c.c.) \tag{6.12}$$

где $\tilde{\psi}$ и ψ - 1/2-дифференциалы на мировом листе, голоморфные на уравнениях движения [2]

$$\bar{\partial}\psi = 0, \qquad \bar{\partial}\tilde{\psi} = 0 \tag{6.13}$$

и для которых рассуждение с гауссовым интегралом приводит к операторному разложению

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(z)\psi(z') &= \frac{1}{z-z'} + :\tilde{\psi}(z)\psi(z'):= \\ &= \frac{1}{z-z'} + J(z) + (z-z') :\partial\tilde{\psi}\psi(z'): + \ldots \end{aligned} \tag{6.14}$$

В формуле (6.14) мы ввели нормальное упорядочение по фермионному вакууму (пока еще не определенному, но удовлетворяющему $\langle 0| : (...) : |0\rangle = 0$) и фермионный голоморфный

[2] Для "анти-голоморфной части" действия все утверждения получаются формальным комплексным сопряжением.

$U(1)$-ток [3]

$$J(z) =: \tilde\psi(z)\psi(z) :$$
$$J(z)\psi(z') = -\underbrace{\tilde\psi(z)\psi(z')}\psi(z) + \ldots = -\frac{\psi(z')}{z-z'} + \ldots \tag{6.15}$$
$$J(z)\tilde\psi(z') = \tilde\psi(z)\underbrace{\psi(z)\tilde\psi(z')} + \ldots = \frac{\tilde\psi(z')}{z-z'} + \ldots$$

относительно которого фермионы заряжены с противоположными зарядами ± 1. Как следует из (6.8) - тензор энергии-импульса

$$T = -\tfrac{1}{2}\left(: \tilde\psi\partial\psi : - : \partial\tilde\psi\psi :\right) \tag{6.16}$$

Этот тензор энергии-импульса по-прежнему может быть получен конструкцией Сугавары

$$J(z)J(z') = \frac{1}{(z-z')^2} + 2T(z') + O(z-z') \tag{6.17}$$

и поэтому генерирует алгебру Вирасоро с центральным зарядом $c = 1$.

Действительно, пользуясь теоремой Вика для фермионов, легко написать

$$\begin{aligned} &: \tilde\psi(z)\psi(z) :: \tilde\psi(z')\psi(z') := \underbrace{\tilde\psi(z)\underbrace{\psi(z)\tilde\psi(z')}\psi(z')} + \\ &+ : \tilde\psi(z)\underbrace{\psi(z)\tilde\psi(z')}\psi(z') : + \underbrace{: \tilde\psi(z) : \psi(z)\tilde\psi(z') : \psi(z') :} + : \tilde\psi(z)\psi(z)\tilde\psi(z')\psi(z') := \\ &= \frac{1}{(z-z')^2} + \frac{1}{z-z'}\left(: \tilde\psi(z)\psi(z') : + : \psi(z)\tilde\psi(z') :\right) + \ldots = \\ &= \frac{1}{(z-z')^2} + : \partial\tilde\psi\psi(z') : + : \partial\psi\tilde\psi(z') : + \ldots \end{aligned} \tag{6.18}$$

6.3 Фермионные моды

На уравнениях движения естественно написать

$$\psi(z) = \sum_r \frac{\psi_r}{z^{r+1/2}}, \qquad \tilde\psi(z) = \sum_s \frac{\tilde\psi_s}{z^{s+1/2}} \tag{6.19}$$

[3] Квадратичный по полям нормально упорядоченный оператор $J_{\rm bc}(z) =: b(z)c(z) :$ тока или духового числа можно ввести и для bc-системы любого спина, но при $j \neq \frac{1}{2}$ этот ток является аномальным. Аномалия проявляется в появлении старшего полюса (третьего порядка) в операторном разложении с тензором энергии-импульса и/или в том, что квантовое среднее $\langle\bar\partial J_{\rm bc}\rangle$ вообще-говоря не равно нулю, а пропорционально кривизне поверхности $R^{(2)}_{z\bar z}$. Коэффициенты при старшем полюсе и в уравнении аномалии содержат фактор $(1-2j)$.

тогда вычисление *антикоммутатора* даст

$$\begin{aligned}\left\{\tilde{\psi}_r,\psi_s\right\}=\left[\tilde{\psi}_r,\psi_s\right]_+=\oint_{C_0'}\frac{dz'}{2\pi i}z'^{s-1/2}\oint_{C_{z'}}\frac{dz}{2\pi i}z^{r-1/2}\tilde{\psi}(z)\psi(z')=\\=\oint_{C_0'}\frac{dz'}{2\pi i}z'^{s-1/2}\oint_{C_{z'}}\frac{dz}{2\pi i}\frac{z^{r-1/2}}{z-z'}=\oint_{C_0'}\frac{dz'}{2\pi i}z'^{s+r-1}=\delta_{s+r,0}\end{aligned}\tag{6.20}$$

Если моды фермионов нумеруются целочисленными индексами $r,s\in\mathbb{Z}$, то

- поля в (6.19) неоднозначны при обходе вокруг нуля;
- есть нулевая мода $[\tilde{\psi}_0,\psi_0]_+=1$ (минимальное представление этой алгебры двумерно, например матрицами $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ что существенно, например в теории фермионных струн.)

Однако если мы будем считать $r,s\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$, то неоднозначность и нулевая мода пропадают. При радиальном квантовании для вакуума в $z=0$ для несингулярности действия операторов

$$\begin{aligned}\psi(z)|0\rangle=\left(\ldots+\frac{\psi_{3/2}}{z^2}+\frac{\psi_{1/2}}{z}+\psi_{-1/2}+\ldots\right)|0\rangle\\\tilde{\psi}(z)|0\rangle=\left(\ldots+\frac{\tilde{\psi}_{3/2}}{z^2}+\frac{\tilde{\psi}_{1/2}}{z}+\tilde{\psi}_{-1/2}+\ldots\right)|0\rangle\end{aligned}\tag{6.21}$$

можно потребовать

$$\psi_r|0\rangle=\tilde{\psi}_r|0\rangle=0,\qquad r>0\tag{6.22}$$

а отрицательные гармоники $\tilde{\psi}_{-r}=\psi_r^\dagger$, $\psi_{-r}=\tilde{\psi}_r^\dagger$, при $r>0$ считать операторами рождения одночастичных состояний. Тогда, очевидно, что как моды тока

$$J(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{J_n}{z^{n+1}},\qquad J_n=:\sum_{r+s=n}\tilde{\psi}_r\psi_s:\tag{6.23}$$

и, в частности, оператор заряда (или числа частиц - при этом число *античастиц* надо вычитать!)

$$J_0=\sum_{r>0}\left(\tilde{\psi}_{-r}\psi_r-\psi_{-r}\tilde{\psi}_r\right)=\sum_{r>0}\left(\psi_r^\dagger\psi_r-\tilde{\psi}_r^\dagger\tilde{\psi}_r\right)=\sum_{r>0}(n_r-\tilde{n}_r)\tag{6.24}$$

(где n_r $\tilde{n}_r$ операторы чисел заполнений для частиц и античастиц, принимающие для фермионов значения только $0,1$ - принцип Паули!) так и генераторы алгебря Вирасоро

$$T(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{L_n}{z^{n+2}},\qquad L_n=\tfrac{1}{2}:\sum_{r+s=n}(r-s)\tilde{\psi}_s\psi_r:\tag{6.25}$$

в частности

$$
\begin{aligned}
L_0 =: \sum_r r\tilde{\psi}_{-r}\psi_r &:= \sum_{r>0} r\left(\tilde{\psi}_{-r}\psi_r + \psi_{-r}\tilde{\psi}_r\right) = \\
&= \sum_{r>0} r\left(\psi_r^\dagger\psi_r + \tilde{\psi}_r^\dagger\tilde{\psi}_r\right) = \sum_{r>0} r\left(n_r + \tilde{n}_r\right)
\end{aligned}
\tag{6.26}
$$

выражаются через билинейные комбинации фермионных мод.