Семинар 8

Евклидовы векторные пространства

1. Докажите, что в трехмерном евклидовом векторном пространстве U определитель $\det G(a,b,c)$ матрицы Грама $G(a,b,c)$, построенной по произвольным базисным векторам $a,b,c \in U$, равен квадрату объема $V(a,b,c)$ параллелепипеда, построенного на векторах a,b,c как на ребрах с общей вершиной.

2. Пользуясь геометрической интерпретацией смешанного произведения в евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^3$, докажите что число $\lambda \in \mathbb{R}$ является собственным числом линейного оператора f в $\mathbb{R}^3$, если и только если $\det(A - \lambda E) = 0$.

3. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим линейный оператор f с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

а) Является ли оператор f ортогональным?

б) Есть ли у оператора f собственные подпространства? Если да, то найдите базис линейного подпространства V_λ для какого-либо собственного числа λ, и

в) для собственного подпространства V_λ найдите базис его ортогонального дополнения $V_\lambda^\perp$.

г) Что собой представляет линейный оператор $f' = f|_{V_\lambda^\perp} : V_\lambda^\perp \to V_\lambda^\perp$? Найдите его матрицу в каком-либо ортонормированном базисе в $V_\lambda^\perp$.

4. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим линейный оператор f с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

а) Является ли оператор f ортогональным?

б) Есть ли у оператора f собственные подпространства? Если да, то найдите уравнения линейного подпространства V_λ для какого-либо собственного числа λ, и

в) найдите базис ортогонального дополнения $V_\lambda^\perp$ для собственного подпространства V_λ.

5. Дано преобразование (т.е. биективное отображение в себя) f евклидова векторного пространства E^n, сохраняющее скалярное произведение (т.е. $(f(u), f(v)) = (u,v)$ для любых векторов $u, v \in E^n$). Докажите, что f - линейный оператор в E^n. (Как следствие, f - ортогональный оператор в E^n.)

Евклидовы аффинные пространства

6. Является ли преобразование f евклидова аффинного пространства $\mathbb{A}^2$ с координатами (x_1, x_2), задаваемое формулами $\begin{cases} x_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + 2, \\ x_2' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + 2, \end{cases}$ движением? Если да, то

а) определите тип движения f;

б) найдите множество неподвижных точек f;

в) найдите инвариантные подпространства f.

6. Является ли преобразование f евклидова аффинного пространства $\mathbb{A}^3$ с координатами (x_1, x_2, x_3), задаваемое формулами $\begin{cases} x_1' = x_3 + 1, \\ x_2' = x_1 - 3, \\ x_3' = x_2 + 2, \end{cases}$ движением? Если да, то

а) определите тип движения f;

б) найдите множество неподвижных точек f;

в) найдите инвариантные подпространства f.