Геометрия, 1 курс. Листок 3. **Линейная Алгебра.**

Задача 1. **(а)** Определите на множестве 2^M подмножеств (конечного) множества M структуру векторного пространства над $\mathbb{F}_2$, если операция сложения задана посредством симметрической разности: $X + Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. **(б)** Выберите базис и вычислите размерность этого векторного пространства. **(в)** Пусть подмножества $M_1, \ldots, M_k$ таковы, что ни одно из них не содержится в объединении остальных. Докажите, что они линейно-независимы. Верно ли обратное? **(г)** Докажите, что операция пересечения $X \mapsto X \cap Y$ с заданным подмножеством Y задает линейный оператор, и вычислите его ранг.

Задача 2. Верно ли, что k линейных функционалов на n-мерном векторном пространстве линейно независимы тогда и только тогда, когда пересечение их ядер имеет размерность $n - k$?

Задача 3. Пусть A, B – пара линейных операторов $V \to W$. Докажите следующие равносильности:
(а) $Ker(A) \subset Ker(B) \Leftrightarrow \exists C : W \to W$ такое, что $CA = B$;
(б) $Im(A) \subset Im(B) \Leftrightarrow \exists D : V \to V$ такое, что $A = BD$.

Задача 4. В стаде 101 корова. Если увести любую одну, то оставшихся можно разделить на два стада по 50 коров так, что суммарные веса коров в первом и во втором стаде совпадут. Докажите, что все коровы весят одинаково. **Указание**: напишите систему линейных уравнений и решите её
(а) над полем $\mathbb{Z}_2$; **(б)** над $\mathbb{Z}$; **(в)** над $\mathbb{Q}$; **(г)** над $\mathbb{R}$.

Задача 5. Приведите пример невырожденного положительно-определенного скалярного произведения на 2π-периодических непрерывных функциях на $\mathbb{R}$ и докажите, что наборы функций
(а) $1, \sin x, \sin 2x, \ldots$; **(б)** $1, \sin x, \sin^2 x, \sin^3 x, \ldots$ линейно независимы над $\mathbb{R}$.

Задача 6. Докажите, что:
(а) набор вещественно-значных функций $f_1, \ldots, f_n$ от одной переменной линейно независим над $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда существует набор точек $a_1, \ldots, a_n$ такой, что $\det \|f_i(a_j)\| \neq 0$;
(б) в этом случае линейная оболочка векторного пространства, натянутого на функции $f_1, \ldots, f_n$, двойственна линейной оболочке функционалов $ev_j : f(x) \mapsto f(a_j)$.

Задача 7. **(а)** Докажите, что пространство вещественно-значных матриц $M_n(\mathbb{R})$ образует евклидово пространство относительно скалярного произведения $(A, B) := tr(AB^t)$.
(б) Предъявите ортонормированный базис;
(в) Найдите ортогональные дополнения к подпространствам кососимметрических ($a_{ij} = -a_{ji}$), симметрических ($a_{ij} = a_{ji}$) и верхнетреугольных ($i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$) матриц.

Задача 8. Пусть V – векторное пространство многочленов от одной переменной с вещественными коэффициентами степени не выше n. Пусть V^* – двойственное пространство. Докажите, что система векторов S образует базис в V (соотв. V^*), и напишите двойственный базис для:
(а) $S := \{1, x, \ldots, x^n\} \subset V$; **(б)** $S := \{f(a_0), \ldots, f(a_n)\} \subset V^*$; **(в)** $S := \{f^{(i)}(x)|_{x=a} | i = 0, \ldots, n\} \subset V^*$;
(г)* $S := \{f^{(i)}(x)|_{x=a} | i = 0, \ldots, m\} \cup \{f^{(i)}(x)|_{x=b} | i = 0, \ldots, n - m - 1\} \subset V^*$;

Задача 9. Полезно продумать геометрический смысл всех пунктов этой задачи для двумерного и трехмерного объемлющего пространств.
(а) Докажите, что квадрат объема параллелепипеда, натянутого на векторы $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$, равен определителю $k \times k$-матрицы Грама, ij-ый матричный элемент которой равен скалярному произведению (v_i, v_j).
(б) Выразите ортогональную проекцию вектора v на плоскость, заданную векторами $v_1, \ldots, v_k$.
(в) Выразите расстояние от точки до плоскости, заданной точкой и набором линейно-независимых векторов, коллинеарных данной плоскости и называемых направляющими векторами плоскости.
(г) Докажите, что к двум непересекающимся аффинным плоскостям размерностей m и k в $\mathbb{R}^{m+k+1}$ можно провести общий перпендикуляр.
(д) Докажите, что если плоскости не имеют параллельных векторов, то имеется единственный общий перпендикуляр. Выразите его длину через скалярные произведения и определители (плоскости заданы точкой и набором направляющих векторов).

Задача 10. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и в нем k-мерную плоскость l. Пусть Γ – решетка (абелева группа) целочисленных векторов в $\mathbb{R}^n$ и $\Gamma_l := \Gamma \cap l$. Верно ли, что набор целочисленных векторов $f_1, \ldots, f_k \subset l$ образует базис в решетке
(а) Γ, если и только если $k = n$ и объём параллелепипеда, натянутого на векторы $f_1, \ldots, f_n$, равен 1;
(б) Γ_l, если и только если объём параллелепипеда, натянутого на векторы $f_1, \ldots, f_k$, равен 1;
(в)* Γ_l, если и только если существует такой набор дополнительных векторов $f_{k+1}, \ldots, f_n$, что объём параллелепипеда, натянутого на векторы $f_1, \ldots, f_n$, равен 1.