Листок 04. Срок сдачи 11 ноября 2016.

Для сдачи каждой из задач 4.1-4.4 необходимо чисто рассказать столько пунктов этой задачи, сколько принимающий сочтет нужным выслушать. Задачи со звездочкой сдаются и фиксируются в кондуите, но в баллах не оцениваются.

Функция $f(x)$ называется *выпуклой* (или *выпуклой вниз*) на на промежутке I, если для любых $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$ и любого $\alpha \in [0,1]$ выполнено

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

В случае, если выполнено обратное неравенство, функцию называют *вогнутой* или *выпуклой вверх.*

04.01. Выпуклые функции. Докажите, что

а) график выпуклой непрерывно дифференцируемой функции лежит не ниже любой касательной к нему;

б) функция выпукла тогда и только тогда, когда для любых $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant b$ и любых неотрицательных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, сумма которых равна единице, выполнено неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n);$$

в) выпуклая на интервале функция непрерывна на нём;

г) выпуклая на интервале функция имеет односторонние производные в каждой точке этого интервала;

д) у выпуклой функции односторонние производные возрастают, в каждой точке производная слева не превосходит производную справа;

е) локальный минимум выпуклой на отрезке функции является её глобальным минимумом на этом же отрезке;

ж) дважды дифференцируемая функция выпукла на интервале, тогда и только тогда, когда её вторая производная неотрицательна на этом интервале.

04.02. Неравенства. а) Докажите, что функции $x \mapsto e^x$ и $x \mapsto -\ln x$ выпуклы на $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^+$, соответственно.

б) Выведите отсюда неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n};$$

в) Докажите, что при $p > 1$ функция $x \mapsto x^p$ выпукла вниз при $x \geqslant 0$;

г) Выведите отсюда неравенство Гельдера

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $p > 1$;

д) Докажите неравенство треугольника

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$$

04.03. Метод Лопиталя.

а) Приведите пример, когда метод Лопиталя "не работает": при $x \to a$ есть предел $f'(x)/g'(x)$, но предел $f(x)/g(x)$ не равен пределу отношения производных; укажите, какие условия теоремы о правиле Лопиталя при этом нарушены.

б) Приведите пример, когда $f(0) = g(0) = 0$, функции f, g дифференцируемые в окрестности нуля, при $x \to 0$ есть предел $f(x)/g(x)$ и нет предела $f'(0)/g'(0)$.

в) Придумайте и докажите правило Лопиталя для раскрытия неопределенности $0 \times \infty$.

г) Придумайте и докажите правило Лопиталя для раскрытия неопределенности 1^∞.

д) Докажите, что если функция f имеет n непрерывных производных в окрестности точки a и $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n)} = 0$, то $f(x) = o\left((x-a)^n\right)$. (Это утверждение можно доказать и при более слабых условиях!)

04.04. а)Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t))$ определены на отрезке $[t_1, t_2]$ и дифференцируемы на интервале (t_1, t_2), причём $\varphi'(t) > 0$ при всех t. Положим $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$. Докажите, что существует такая функция $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, что равенства

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad\qquad t \in [t_1, t_2]$$

выполняются для тех и только для тех точек (x, y), для которых $y = g(x)$, $x \in [a, b]$. Докажите, что функция g дифференцируема на (a, b), причём $g'(x) = g'(\varphi(t)) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

б) Докажите, что если в условиях предыдущего пункта функции φ и ψ дважды дифференцируемы, то функция $g(x)$ также дважды дифференцируема, причём для $x = \varphi(t)$

$$g''(x) = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'(t)^3}.$$

в) Пусть функции $\varphi(t)$, $\psi(t))$ определены на полуинтервале $[t_1, t_2)$ и дифференцируемы на нем, причём $\varphi'(t) > 0$ при всех t и $\varphi(t)$ и $\psi(t))$ являются бесконечно большими в окрестности точки t_2. Сформулируйте и докажите условие того, что кривая $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t))$ имеет наклонную асимптоту.

г) Пусть кривая задана в полярных координатах уравнением $r = \rho(\varphi)$, с дифференцируемой функцией ρ. Вычислите тангенс угла, образованного касательной к кривой в точке, соответствующей значению φ_0 (где $\rho(\varphi_0) > 0$) и касательной к окружности $r = \rho(\varphi_0)$ в этой точке. [Подсказка: рассмотрите эту кривую как параметрическую с параметром φ.]

04.05.* Докажите, что любое открытое множество на прямой можно представить как не более чем счетное объединение непересекающихся интервалов и лучей.

04.06.* Пусть функция f определена и дифференцируема на некотором луче $(M, +\infty)$. Докажите, что если $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, то $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.