1 Вводная лекция

2 Квантование: частицы и струны

3 Двумерные теории бозонов и фермионов

4 Операторный формализм для скалярного поля

5 Тензор энергии-импульса и примарные операторы

6 Фермионы и системы первого порядка

7 Бозонизация и однопетлевые статсуммы

7.1 Статсуммы в теории фермионов

Вспомним теорию двумерных безмассовых фермионов с действием

$$S = \frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2z\ \tilde{\psi}\bar{\partial}\psi \quad (\ +c.c.) \tag{7.1}$$

а также квадратичными по фермионам током и тензором энергии-импульса

$$J(z) =: \tilde{\psi}(z)\psi(z):, \qquad T = -\tfrac{1}{2}\Big(:\tilde{\psi}\partial\psi: - :\partial\tilde{\psi}\psi:\Big) \tag{7.2}$$

На решениях уравнений движения естественно написать

$$\psi(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \frac{\psi_r}{z^{r+1/2}}, \qquad \tilde{\psi}(z) = \sum_{s\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \frac{\tilde{\psi}_s}{z^{s+1/2}} \tag{7.3}$$

тогда квантование естественно приводит к формулам

$$\Big\{\tilde{\psi}_r, \psi_s\Big\} = \Big[\tilde{\psi}_r, \psi_s\Big]_+ = \delta_{r+s,0}, \qquad r,s\in\mathbb{Z}+\tfrac{1}{2} \tag{7.4}$$

и фоковскому вакууму для фермионов

$$\psi_r|0\rangle = \tilde{\psi}_r|0\rangle = 0, \qquad r>0 \tag{7.5}$$

Тогда, очевидно, что как моды тока

$$J(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{J_n}{z^{n+1}},\qquad J_n=:\sum_{r+s=n}\tilde{\psi}_r\psi_s: \tag{7.6}$$

и, в частности, оператор заряда (или числа частиц - при этом число *античастиц* надо вычитать!)

$$J_0=\sum_{r>0}\left(\tilde{\psi}_{-r}\psi_r-\psi_{-r}\tilde{\psi}_r\right)=\sum_{r>0}\left(\psi_r^\dagger\psi_r-\tilde{\psi}_r^\dagger\tilde{\psi}_r\right)=\sum_{r>0}\left(n_r-\tilde{n}_r\right) \tag{7.7}$$

(где n_r $\tilde{n}_r$ операторы чисел заполнений для частиц и античастиц, принимающие для фермионов значения только $0,1$ - принцип Паули!) так и генераторы алгебря Вирасоро

$$T(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{L_n}{z^{n+2}},\qquad L_n=\tfrac{1}{2}:\sum_{r+s=n}(r-s)\tilde{\psi}_s\psi_r: \tag{7.8}$$

в частности

$$\begin{aligned}L_0=:\sum_r r\tilde{\psi}_{-r}\psi_r:=\sum_{r>0}r\left(\tilde{\psi}_{-r}\psi_r+\psi_{-r}\tilde{\psi}_r\right)=\\=\sum_{r>0}r\left(\psi_r^\dagger\psi_r+\tilde{\psi}_r^\dagger\tilde{\psi}_r\right)=\sum_{r>0}r\left(n_r+\tilde{n}_r\right)\end{aligned} \tag{7.9}$$

выражаются через билинейные комбинации фермионных мод.

Наконец, можно поставить естественный вопрос о вычислении матричных элементов и следов по Гильбертову пространству $\mathcal{H}$ состояний фермионной системы, которое натягивается на базис

$$|0\rangle\oplus_{r>0}\psi_{-r}|0\rangle\oplus_{r>0}\tilde{\psi}_{-r}|0\rangle \tag{7.10}$$

двойственным для которого является

$$\langle 0|\oplus_{r>0}\langle 0|\tilde{\psi}_r\oplus_{r>0}\langle 0|\psi_r \tag{7.11}$$

как следствие очевидного спаривания $\langle 0|0\rangle=1$, $\langle 0|\tilde{\psi}_r\psi_{-s}|0\rangle=\langle 0|\psi_r\tilde{\psi}_{-s}|0\rangle=\delta_{r,s}$. Поскольку

$$L_0|0\rangle=0,\qquad L_0\ \psi_{-r}|0\rangle=r\ \psi_{-r}|0\rangle,\quad L_0\ \tilde{\psi}_{-r}|0\rangle=r\ \tilde{\psi}_{-r}|0\rangle \tag{7.12}$$

то почти очевидно, что для следа "оператора эволюции" по полному пространству состояний получаем

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}q^{L_0}=\prod_{r>0}\sum_{\{n_r\}}q^{rn_r}\prod_{r>0}\sum_{\{\tilde{n}_r\}}q^{r\tilde{n}_r}=\prod_{r>0}\left(1+q^r\right)^2=\prod_{n\geq 0}\left(1+q^{n+1/2}\right)^2=q^{1/24}\frac{\theta_3(q)}{\eta(q)} \tag{7.13}$$

где мы воспользовались стандартными обозначениями

$$\eta(q)=q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n),\qquad \theta_3(q)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n^2/2} \tag{7.14}$$

для функции Дедекинда и тэта-константы, а формулу произведения (последнее равенство в (7.13)) обсудим ниже.

7.2 Вещественные фермионы

Полезно также иногда переписать действие (7.1) введя “вещественные фермионы”

$$
\begin{gathered}
\tilde{\psi}(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_1(z)+i\Psi_2(z)\right), \qquad \psi(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_1(z)-i\Psi_2(z)\right) \\
S=\frac{1}{2\pi}\sum_{\mu=1,2}\int_\Sigma d^2z\ \Psi_\mu\bar{\partial}\Psi_\mu
\end{gathered}
\tag{7.15}
$$

и ровно так же можно сделать в анти-голоморфном секторе. С помощью таких вещественных фермионов пишется действие фермионной струны с суперсимметрией на мировом листе.

Голоморфные на уравнениях движения $\bar{\partial}\Psi=0$ вещественные фермионы представляют собой поля конформной теории с операторным разложением

$$
\Psi(z)\Psi(z')=\frac{1}{z-z'}+O(z-z')
\tag{7.16}
$$

в которой *нет* тока единичной размерности и спина, а тензор энергии-импульса

$$
\begin{gathered}
T(z)=-\tfrac{1}{2}:\Psi\partial\Psi(z):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{L_n}{z^{n+2}} \\
L_n=\tfrac{1}{2}:\sum_{r+s=n}r\Psi_s\Psi_r:, \qquad L_0=\sum_{r>0}r\Psi_{-r}\Psi_r
\end{gathered}
\tag{7.17}
$$

или его компоненты, выраженные через гармоники

$$
\Psi(z)=\sum_r\frac{\Psi_r}{z^{r+1/2}}, \qquad [\Psi_r,\Psi_s]_+=\delta_{s+r,0}, \qquad \Psi_r|0\rangle=0, \quad r>0
\tag{7.18}
$$

Это очевидным образом приводит к центральному заряду $c=\frac{1}{2}$ в операторном разложении или коммутаторах (7.17), а также “половинной статсумме” вещественного фермиона

$$
\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\mu}q^{L_0}=\prod_{r>0}\sum_{\{n_r\}}q^{rn_r}=\prod_{r>0}(1+q^r)=\prod_{n\geq 0}\left(1+q^{n+1/2}\right)
\tag{7.19}
$$

так как гильбертово пространство комплексного фермиона с $c=1$ представляет собой $\mathcal{H}=\otimes_{\mu=1,2}\mathcal{H}_\mu$. Нетривиальным образом теория вещественного фермиона связана с непрерывным пределом двумерной модели Изинга, у которой также $c=\frac{1}{2}$.

7.3 Немного статфизики и обобщения на другие тэта-константы

Докажем теперь важное тождество (тройного произведения Якоби)

$$
\sum_{k\in\mathbb{Z}}q^{\frac{1}{2}k^2}t^k=\prod_{n>0}(1-q^n)\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}t\right)\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}t^{-1}\right)
\tag{7.20}
$$

представив его как производящую функцию для большого канонического ансамбля системы свободных фермионов с энергиями (7.9) или

$$e^{-E_r/T} = e^{-\frac{r}{T}} = q^r, \qquad r \in \mathbb{Z} + \tfrac{1}{2},\ r > 0 \tag{7.21}$$

и химическим потенциалом $t = e^{\mu/T}$. Другими словами, состояния системы нумеруются полуцелыми числами, число частиц и античастиц в каждом состоянии $n_r = 0, 1$ и $\tilde{n}_r = 0, 1$ соответственно, а полное число частиц $J_0 = N = \sum_r (n_r - \tilde{n}_r)$. Таким образом, для статсуммы имеем

$$\begin{gathered} Z(q,t) = \sum e^{-\frac{(E-\mu N)}{T}} = \mathrm{Tr}\left(q^{L_0} t^{J_0}\right) = \sum_{\{n_r\};\{\tilde{n}_r\}} q^{r(n_r+\tilde{n}_r)} t^{n_r - \tilde{n}_r} = \\ = \prod_{r>0} \sum_{\{n_r\}} (q^r t)^{n_r} \prod_{r>0} \sum_{\{\tilde{n}_r\}} \left(q^r t^{-1}\right)^{\tilde{n}_r} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + q^{n-\frac{1}{2}} t\right)\left(1 + q^{n-\frac{1}{2}} t^{-1}\right) \end{gathered} \tag{7.22}$$

что является почти тривиальным обобщением вычисления статсуммы (7.13) без химпотенциала. С другой стороны совершенно очевидно, что та же статсумма большого канонического ансамбля может быть представлена в виде

$$Z(q,t) = \mathrm{Tr}\left(q^{L_0} t^{J_0}\right) = \sum_{N \in \mathbb{Z}} t^N Z_N(q) \tag{7.23}$$

ряда по химпотенциалу с коэффициентами - статсуммами при фиксированном фермионном числе $N = \sum_r (n_r - \tilde{n}_r)$.

Как вычислить эти статсуммы $Z_N(q)$ с фиксированными зарядами? Для фермионного “гамильтониана” (7.9) в терминах “чисел заполнения”

$$H = L_0 = \sum_{r>0} r\left(\tilde{\psi}_{-r}\psi_r + \psi_{-r}\tilde{\psi}_r\right) = \sum_{r>0} (r n_r + r\tilde{n}_r) \tag{7.24}$$

энергии системы определяются занятыми уровнями с $n_p = 1$ и $\tilde{n}_q = 1$ при каких-то $p_1, \ldots, p_d$ и $q_1, \ldots, q_{\tilde{d}}$, так что

$$E = \sum_{j=1}^{d} p_j + \sum_{k=1}^{\tilde{d}} q_k, \qquad N = d - \tilde{d} \tag{7.25}$$

Пусть сначала $N = 0$, $d = \tilde{d}$, тогда

$$E = \sum_{j=1}^{d} (p_j + q_j) = \sum_{i=1}^{l} k_i = M \geq 0, \qquad N = 0 \tag{7.26}$$

где M и $\{k_i\}$ - целые числа, а кроме того $\{k_i\}$ - произвольные разбиения M. Это означает, что число таких состояний эквивалентно числу состояний

$$|Y_{\mathbf{k}}\rangle = |k_1, \ldots, k_l\rangle = \alpha_{-k_1} \ldots \alpha_{-k_l}|0\rangle \tag{7.27}$$

с энергией

$$L_0|Y_{\mathbf{k}}\rangle = \sum_{k>0} \alpha_{-k}\alpha_k|Y_{\mathbf{k}}\rangle = \left(\sum_{j=1}^{l} k_j\right)|Y_{\mathbf{k}}\rangle \tag{7.28}$$

в теории свободных бозонов или свободного скалярного поля в двумерии.

Графически соответствие (7.26) удобно представлять в виде диаграмм Юнга, для которых упорядоченный набор целых чисел $\{k_i\}$, $i = 1, \ldots, l$ представляет длины строк, а упорядоченные наборы полуцелых чисел $\{p_j\}$ и $\{q_j\}$, $j = 1, \ldots, d$ являются так называемыми координатами Фробениуса, или попросту количеством клеточек в строках (столбцах) над (под) главной диагональю. Существенно, что состояния как в бозонной так и в фермионной теории (с фиксированным - например нулевым - зарядом) могут быть перечислены, хотя и по разному, с помощью одних и тех же диаграмм Юнга, причем энергия таких состояний (и в том и в другом случае) равна числу клеточек в соответствующей диаграмме.

В теории свободных бозонов (7.27), (7.28) статсумма элементарно вычисляется с помощью геометрической прогрессии

$$Z_0(q) = \mathrm{Tr}\ q^{L_0} = \prod_{n>0} \mathrm{Tr}\ q^{\alpha_{-n}\alpha_n} = \prod_{n>0}\left(1 + q^n + q^{2n} + \ldots\right) = \frac{1}{\prod_{n>0}(1-q^n)} \tag{7.29}$$

где в правой части естественно стоит производящая функция для числа разбиений или диаграмм Юнга. Если же $|N| = |l - \tilde{l}| > 0$, то ситуация меняется несильно - пространство состояний представляет собой модуль над новым, “заряженным вакуумом” с зарядом $J_0 = N$, если скажем $l > \tilde{l}$ - то со старшим вектором $\psi^\dagger_{N-1/2} \ldots \psi^\dagger_{1/2}|0\rangle = \tilde{\psi}_{1/2-N} \ldots \tilde{\psi}_{-1/2}|0\rangle$ с энергией

$$E_N = \sum_{j=1}^{N}\left(j - \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}N^2 \tag{7.30}$$

над которым растет та же башня, эквивалентная модулю из “бозонов”. Таким образом, в секторе с зарядом N

$$Z_N(q) = q^{N^2/2} Z_0(q) = \frac{q^{N^2/2}}{\prod_{n>0}(1-q^n)} \tag{7.31}$$

причем результат естественно не зависит от знака $N = d - \tilde{d}$. Окончательно для производящей функции большого канонического ансамбля получаем

$$
\begin{aligned}
Z(q,t) &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}t\right)\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}t^{-1}\right) = \\
&= \sum_{N\in\mathbb{Z}} t^N Z_N(q) = \frac{\sum_{N\in\mathbb{Z}} t^N q^{N^2/2}}{\prod_{n>0}(1-q^n)}
\end{aligned}
\tag{7.32}
$$

что эквивалентно формуле тройного произведения Якоби. Правую часть этого равенства легко переписать, вводя тэта-*функцию* Якоби

$$
Z(q,t) = \frac{\sum_{N\in\mathbb{Z}} t^N q^{N^2/2}}{\prod_{n>0}(1-q^n)} = \frac{\Theta(t;q)}{\prod_{n>0}(1-q^n)}
\tag{7.33}
$$

в мультипликативных переменных, т.е. $t = e^{2\pi i z}$, $q = e^{2\pi i\tau}$. При $t=1$ отсюда сразу следует правая часть (7.13).

Формула (7.32) имеет некоторые другие очевидные следствия. Например, можно ввести оператор фермионного числа F и фермионной четности $(-)^F$, такие, что

$$
\begin{gathered}
(-)^F|0\rangle = |0\rangle, \qquad (-)^F\ \psi_{-r}|0\rangle = -\psi_{-r}|0\rangle, \quad (-)^F\ \tilde{\psi}_{-r}|0\rangle = -\psi_{-r}|0\rangle, \quad \forall r \\
\left[(-)^F,\psi_r\right]_+ = 0, \qquad \left[(-)^F,\tilde{\psi}_r\right]_+ = 0, \qquad \forall r
\end{gathered}
\tag{7.34}
$$

и т.д. [1] Тогда из (7.32) при $t=-1$ очевидно, что

$$
\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(-)^F q^{L_0} = \prod_{r>0}(1-q^r)^2 = \prod_{n\geq 0}\left(1-q^{n+1/2}\right)^2 = q^{1/24}\frac{\theta_4(q)}{\eta(q)}
\tag{7.35}
$$

где появляется другая тэта-константа

$$
\theta_4(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-)^n q^{n^2/2}
\tag{7.36}
$$

Наконец, если мы вдруг допустим, что *целочисленные* фермионные гармоники тоже имеют смысл (забыв пока про проблему с квазипериодичностью или двузначностью и про нулевую моду), то формально заменив в (7.13) полуцелые индексы на целые, получим

$$
\mathrm{Tr}q^{L_0} = \prod_{n>0}(1+q^n)^2 = \frac{q^{-1/12}\theta_2(q)}{2\eta(q)}
\tag{7.37}
$$

где уже

$$
\theta_2(q) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} q^{r^2/2}
\tag{7.38}
$$

[1] Очевидно, что этот оператор совпадает $F = J_0 = N$ по модулю 2, т.е. $(-)^F = (-)^{J_0}$.

Наконец самый интересный и неожиданный результат должен был бы получиться с четвертой известной тэта-константой $\theta_1(q) = 0$. С некоторой натяжкой его можно заработать переопределив сначала (7.37) на конечную константу и переписав в виде

$$\mathrm{Tr} q^{L_0} = \prod_{n\geq 0} (1+q^n)^2 = \frac{2q^{-1/12}\theta_2(q)}{\eta(q)} \tag{7.39}$$

ну и тогда "почти очевидно, что"

$$\mathrm{Tr}(-)^F q^{L_0} = \prod_{n\geq 0} (1-q^n)^2 = 0 \tag{7.40}$$