

## Струны и КТП. Задачи-4

1. Рассмотрим “фермионный осциллятор” с гамильтонианом  $H = \omega c^\dagger c$ , где ферми-операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям  $cc^\dagger + c^\dagger c = 1$ ,  $c^2 = (c^\dagger)^2 = 0$ . Реализуйте их матрицами в  $n$ -мерном пространстве (чему может быть равно  $n$ ?) и найдите уровни энергии.
2. Суперсимметричный осциллятор задается гамильтонианом  $H = \omega a^\dagger a + \omega c^\dagger c$ , где  $a, a^\dagger$  – бозонные операторы ( $[a^\dagger, a] = 1$ ), а  $c, c^\dagger$  – фермионные, как в предыдущей задаче.
  - а) Найдите уровни энергии.
  - б) Постройте операторы  $Q, Q^\dagger$  такие, что  $[Q, H] = [Q^\dagger, H] = 0$ ,  $[Q, Q^\dagger] = H$ .

Везде ниже  $\psi_r, \tilde{\psi}_r, J_n, L_n$  – определенные стандартным образом моды фермионов, тока и тензора энергии-импульса.

3. Докажите, что  $\langle \tilde{\psi}_{r_1} \dots \tilde{\psi}_{r_n} \psi_{s_n} \dots \psi_{s_1} \rangle = \det_{ij} \langle \tilde{\psi}_{r_i} \psi_{s_j} \rangle$ .
4. В теории свободных безмассовых фермионов с действием  $\frac{1}{\pi} \int \tilde{\psi} \bar{\partial} \psi d^2 z$  вычислите  $\langle \tilde{\psi}(z_1) \dots \tilde{\psi}(z_n) \psi(w_n) \dots \psi(w_1) \rangle$ .
5. а) Докажите, что  $[J_n, \psi_r] = \psi_{n+r}$ ,  $[J_n, \tilde{\psi}_r] = -\tilde{\psi}_{n+r}$ ,  $[J_n, J_m] = n\delta_{n+m,0}$ ; б) Найдите  $[L_n, \psi_r]$  и  $[L_n, \tilde{\psi}_r]$ .
6. Введем  $J(\mathbf{t}) \equiv \sum_{n \geq 1} t_n J_n$ , где  $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots\}$  – бесконечный набор формальных переменных. Найдите а)  $e^{J(\mathbf{t})} \psi(z) e^{-J(\mathbf{t})}$ ,  $e^{J(\mathbf{t})} \tilde{\psi}(z) e^{-J(\mathbf{t})}$ ; б)  $e^{J(\mathbf{t})} J_{-n} e^{-J(\mathbf{t})}$ .
7. Вычислите  $e^{tL_0} \psi(z) e^{-tL_0}$  и  $e^{tL_0} \tilde{\psi}(z) e^{-tL_0}$ .