

Евклидовы векторные и аффинные пространства

1. В евклидовом векторном пространстве \mathbb{R}^3 рассмотрим линейный оператор f с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Является ли оператор f ортогональным?
- Есть ли у оператора f собственные подпространства? Если да, то найдите уравнения линейного подпространства V_λ для какого-либо собственного числа λ , и
- найдите базис ортогонального дополнения V_λ^\perp для собственного подпространства V_λ .

2. Является ли преобразование f евклидова аффинного пространства \mathbb{A}^3 с координатами (x_1, x_2, x_3) , задаваемое формулами

$$\begin{cases} x'_1 = x_3 + 1, \\ x'_2 = x_1 - 3, \\ x'_3 = x_2 + 2, \end{cases}$$

движением? Если да, то

- определите тип движения f ;
- найдите множество неподвижных точек f ;
- найдите инвариантные подпространства f .

3. Найдите отношение объемов двух тетраэдров в E^3 , если вершины одного из них являются центроидами граней другого.

Кривые второго порядка в аффинной плоскости

3. Эллипсом называется аффинный образ окружности (достаточно взять окружность с уравнением $x^2 + y^2 = 1$, т.е. окружность радиуса 1 с центром в начале координат).

а) Докажите, что в аффинных координатах x, y в \mathbb{A}^2 эллипс C задается уравнением второго порядка

$$(1) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

где коэффициенты a, b, c удовлетворяют условиям

$$(2) \quad ac > 0, \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} > 0.$$

б) Верно ли, что кривая с уравнением (1), удовлетворяющая условиям (2), есть эллипс?

4. а) Является ли эллипс C центрально-симметричной фигурой? Если да, то найдите координаты его центра симметрии, если C задан уравнением (1).

б) Докажите, что все прямые, которые делят площадь эллипса пополам, проходят через одну точку. Как охарактеризовать эту точку?

5. Является ли эллипс C в евклидовой аффинной плоскости E^2 , отличный от окружности, зеркально-симметричной фигурой? Если да, то найдите уравнения всех его осей симметрии в декартовых прямоугольных координатах x, y в E^2 . Каков угол между двумя различными осями симметрии эллипса C ?

6. Гиперболой называется аффинный образ кривой с уравнением $xy = 1$.

а) Докажите, что в аффинных координатах x, y в \mathbb{A}^2 гипербола C задается уравнением второго порядка (1), где коэффициенты a, b, c удовлетворяют условию

$$(3) \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} < 0.$$

б) Верно ли, что кривая с уравнением (1), удовлетворяющая условию (3), есть гипербола?