1 Вводная лекция

2 Квантование: частицы и струны

3 Двумерные теории бозонов и фермионов

4 Операторный формализм для скалярного поля

5 Тензор энергии-импульса и примарные операторы

6 Фермионы и системы первого порядка

7 Бозонизация и однопетлевые статсуммы

8 Бозоны на торе и фермионы

8.1 Статсуммы на торе для теорий бозонов

В теории струн Полякова, мы сначала учились вычислять функциональные интегралы. Например, легко вычислить следующий ответ для интеграла по D бозонным полям - координатам струны

$$\int DXe^{-\frac{1}{2}\int_\Sigma(\partial X)^2} = \int dX_0 \int DX' e^{-\frac{1}{2}(X',\Delta X')} = \mathcal{V}_D \left(\int_\Sigma d^2z\sqrt{g}\right)^{D/2} (\det{}'\Delta)^{-D/2} \tag{8.1}$$

а если в качестве мирового листа взять тор с метрикой $ds^2 = |d\xi_1 + \tau d\xi_2|^2 = |dz|^2$, с площадью $\int_\Sigma d^2z\sqrt{g} = \mathrm{Im}\tau$ то результат (детерминант!) вычисляется явно [1]

$$\det{}'\Delta = \det{}'\Delta_0 \sim (\mathrm{Im}\tau)^2 \left|\eta(e^{2\pi i\tau})\right|^4 \tag{8.2}$$

где индекс "0" подчеркивает, что соответствующий оператор действует на пространстве функций, а

$$\eta(q) = q^{1/24}\prod_{n>0}(1-q^n)\,, \qquad q = e^{2\pi i\tau} \tag{8.3}$$

как обычно обозначает функцию Дедекинда.

[1] Схема вычисления приведена в Приложении A.

Вспомним теперь как получается этот результат в операторном формализме (в том числе - проверим наши манипуляции). В теории свободного скалярного поля для статсуммы на торе можно написать:

$$
\begin{aligned}
&\int DXe^{-\frac{1}{2}(X,\Delta X)} = \left(\frac{\det'\Delta}{\mathrm{Im}\tau}\right)^{-1/2} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}\otimes\bar{\mathcal{H}}} q^{L_0-c/24}\bar{q}^{\bar{L}_0-c/24} = \\
&= \int dp e^{i\pi(\tau-\bar{\tau})p^2} \left|q^{-1/24}\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}}\, q^{\sum_{n>0}\alpha_n\alpha_{-n}}\right|^2 \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Im}\tau}}\frac{1}{\eta(q)\eta(\bar{q})}
\end{aligned}
\tag{8.4}
$$

т.е. получить этот результат с помощью вычисления следа по пространству Фока с базисом $\alpha_{-k_1}\ldots\alpha_{-k_l}|p\rangle$ для операторов [2]

$$
L_0 = \tfrac{1}{2}p^2 + \sum_{n>0}\alpha_n\alpha_{-n}, \qquad \bar{L}_0 = \tfrac{1}{2}p^2 + \sum_{n>0}\bar{\alpha}_n\bar{\alpha}_{-n}
\tag{8.5}
$$

и последующему интегрированию по нулевой моде p - одинаковой для голоморфного и антиголоморфного сектора.

В теории одного свободного безмассового скалярного поля с действием $S=\frac{1}{2}\int d^2z(\partial_\alpha X)^2$, но принимающем значения в окружности

$$
X \sim X + 2\pi R
\tag{8.6}
$$

формула (8.1) модифицируется очевидным образом. При вычисления статсуммы на торе теперь необходимо учесть многозначность поля

$$
\begin{aligned}
Z_{n,m} = \int DXe^{-S} = e^{-S_{n,m}}\left(\int_\Sigma d^2z\sqrt{g}\right)^{1/2}(\det'\Delta_0)^{-1/2} = \\
= e^{-S_{n,m}}\frac{2\pi R}{\sqrt{\mathrm{Im}\tau}\cdot\eta\bar{\eta}}
\end{aligned}
\tag{8.7}
$$

с граничными условиями, заданными парой целых чисел $n,m\in\mathbb{Z}$

$$
\begin{gathered}
X(z+1,\bar{z}+1) = X(z,\bar{z}) + 2\pi Rn \\
X(z+\tau,\bar{z}+\bar{\tau}) = X(z,\bar{z}) + 2\pi Rm \\
n,m\in\mathbb{Z}
\end{gathered}
\tag{8.8}
$$

определяющими классическое решение (∂X_{cl} и $\bar{\partial}X_{\mathrm{cl}}$ - голоморфный и антиголоморфный дифференциал на торе)

$$
X_{\mathrm{cl}} = X_0 + pz + \bar{p}\bar{z}, \quad p = 2\pi R\frac{n\bar{\tau}-m}{\bar{\tau}-\tau}
\tag{8.9}
$$

[2] Вычитание $c/24$ легко объясняется, например, переходом от цилиндра к плоскости, как энергия нулевых колебаний - в случае свободного бозона $\frac{1}{2}\sum_{n>0}n=-1/24$, необходимостью модулярной инвариантности и т.п.

и действие, вычисленное на этом решении

$$S_{n,m} = \frac{1}{2\pi}\int d^2z\sqrt{g}\bar{\partial}X_{\rm cl}\partial X_{\rm cl} = \frac{\pi R^2}{2{\rm Im}\tau}|n\tau - m|^2 \qquad (8.10)$$

Таким образом, полная статсумма возникает в результате суммы по всевозможным граничным условиям, т.е.

$$Z(\tau,\bar{\tau};R) = \sum_{n,m} Z_{n,m} = \frac{2\pi R}{\sqrt{{\rm Im}\tau}\cdot\eta\bar{\eta}}\sum_{n,m}e^{-S_{n,m}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{{\rm Im}\tau}\cdot\eta\bar{\eta}}\sum_{n,m}e^{-\frac{\pi R^2}{2{\rm Im}\tau}|\tau n - m|^2} \qquad (8.11)$$

Воспользовавшись формулой пересуммирования Пуассона (или модулярного преобразования для тэта функции на одномерном торе!)

$$\begin{aligned}\theta(b|ia) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi an^2+2\pi ibn} = a^{-1/2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{\pi}{a}(m-b)^2} = a^{-1/2}e^{-\frac{\pi}{a}b^2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{\pi}{a}m^2+2\pi\frac{b}{a}m} = \\ = a^{-1/2}e^{-\frac{\pi}{a}b^2}\theta\left(\frac{b}{ia}|\frac{i}{a}\right), \qquad a>0\end{aligned} \qquad (8.12)$$

суммирование в формуле (8.11) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}\frac{R}{\sqrt{\alpha'\tau_2}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{\pi R^2}{\alpha'{\rm Im}\tau}|n\tau-m|^2} = \frac{R}{\sqrt{\alpha'\tau_2}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{\pi R^2}{\alpha'\tau_2}\left((m-\tau_1 n)^2+\tau_2^2n^2\right)} = \\ = \frac{R}{\sqrt{\alpha'\tau_2}}e^{-\frac{\pi R^2}{\alpha'}\tau_2n^2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{\pi R^2}{\alpha'\tau_2}(m-\tau_1 n)^2} = e^{-\frac{\pi R^2}{\alpha'}\tau_2 n^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-\pi\frac{\alpha'\tau_2}{R^2}k^2+2\pi i\tau_1 nk}\end{aligned} \qquad (8.13)$$

где мы восстановили размерный параметр $\alpha' = 2$. Таким образом, статсумму (8.11) (с точностью до численной нормировки) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}Z(\tau,\bar{\tau};R) \simeq \frac{R}{\sqrt{\alpha'\tau_2}\cdot\eta\bar{\eta}}\sum_{n,m}e^{-\frac{\pi R^2}{\alpha'\tau_2}\left((m-\tau_1 n)^2+\tau_2^2n^2\right)} = \frac{1}{\eta\bar{\eta}}\sum_{n,k}e^{-\pi\tau_2\left(\frac{R^2n^2}{\alpha'}+\frac{\alpha'k^2}{R^2}\right)+2\pi i\tau_1 nk} = \\ = \frac{1}{\eta\bar{\eta}}\sum_{n,k}q^{\frac{\alpha'}{4}\left(\frac{k}{R}+\frac{Rn}{\alpha'}\right)^2}\bar{q}^{\frac{\alpha'}{4}\left(\frac{k}{R}-\frac{Rn}{\alpha'}\right)^2}, \qquad q = e^{2\pi i\tau}, \quad \bar{q} = e^{-2\pi i\bar{\tau}}\end{aligned} \qquad (8.14)$$

С точки зрения операторного формализма это означает, что отличие от скалярного поля со значениями в прямой $\mathbb{R}$ заключается в том, как устроены нулевые моды нулевых генераторов Вирасоро, а именно

$$L_0 = \tfrac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n>0}\alpha_n\alpha_{-n}, \qquad \bar{L}_0 = \tfrac{1}{2}\bar{\alpha}_0{}^2 + \sum_{n>0}\bar{\alpha}_n\bar{\alpha}_{-n} \qquad (8.15)$$

действующие в пространстве с базисом $\alpha_{-k_1}\ldots\alpha_{-k_l}|0;n,k\rangle$ (тензорно на антиголоморфную компоненту), где теперь "вакуум" $|0;n,k\rangle$ дополнительно нумеруется двумя целыми числами, в отличие от одного непрерывного параметра (импульса или заряда) p. Другими словами (при $\alpha' = 2$):

$$
\begin{aligned}
L_0|0;k,n\rangle &= \tfrac{1}{2}\alpha_0^2|0;k,n\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{R}+\frac{Rn}{2}\right)^2|0;k,n\rangle \\
\bar{L}_0|0;k,n\rangle &= \tfrac{1}{2}\bar{\alpha}_0^2|0;k,n\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{R}-\frac{Rn}{2}\right)^2|0;k,n\rangle
\end{aligned}
\tag{8.16}
$$

что отвечает

$$
\alpha_0|0;k,n\rangle = \left(\frac{k}{R}+\frac{Rn}{2}\right)|0;k,n\rangle, \qquad \bar{\alpha}_0|0;k,n\rangle = \left(\frac{k}{R}-\frac{Rn}{2}\right)|0;k,n\rangle \tag{8.17}
$$

или же

$$
\tfrac{1}{2}\left(\alpha_0+\bar{\alpha}_0\right)|0;k,n\rangle = \frac{k}{R}|0;k,n\rangle, \qquad \left(\alpha_0-\bar{\alpha}_0\right)|0;k,n\rangle = Rn|0;k,n\rangle \tag{8.18}
$$

где первый оператор отвечает квантованному ($k \in \mathbb{Z}$) импульсу частицы (струны как целого) на окружности, а второй - числу намоток этой струны на окружность.

8.2 Пространство состояний при разных радиусах

Отметим для начала важнейшее свойство статсуммы (8.14) скалярного поля на окружности: она инвариантна относительно замены $R \leftrightarrow \alpha'/R$, т.е.

$$
Z(\tau,\bar{\tau};R) = Z(\tau,\bar{\tau};\alpha'/R) \tag{8.19}
$$

поскольку при таком преобразовании полный спектр не меняется. Из формул (8.18) ясно, что для струны на окружности “обратного радиуса” (меньше планковской длины: $\alpha'/R \ll \sqrt{\alpha'}$ если $R \gg \sqrt{\alpha'}$) квантованные импульсы меняются ролями с намотками, попросту $k \leftrightarrow n$.

Из этого рассуждения выросла одна из главных интригующих гипотез современной матфизики: по крайней мере на уровне спектра простейшая теория струн на окружности S_R радиуса R (или теория на $S_R \times \mathcal{X}$) эквивалентна теории на *другой* окружности $S_{\alpha'/R}$ (соответственно на другом многообразии $S_{\alpha'/R}\times\mathcal{X}$). В следующем по простоте примере, когда $\mathcal{X} = S_{\tilde{R}}$ представляет собой тоже окружность, а $S_R\times\mathcal{X} = S_R\times S_{\tilde{R}}$ - двумерный тор, при таком преобразовании

$$
R \leftrightarrow \alpha'/R, \quad \mathrm{Area} = R\tilde{R} \leftrightarrow \alpha'\tilde{R}/R = -i\alpha'\mathcal{T} \tag{8.20}
$$

площадь (обезразмеренная квадратом струнной длины) переходит в модуль комплексной структуры двойственного тора, и наоборот. Математики любят называть такую симметрию зеркальной, а двойственные при таком преобразовании многообразия - *зеркальными многообразиями.*

В некомпактном случае “вакуумы” (или примарные состояния тензорной суммы голоморфной и антиголоморфной алгебр Вирасоро) нумеруются единственным вещественным числом p, т.е.

$$L_0|p\rangle = \tfrac{1}{2}p^2|p\rangle, \quad \bar{L}_0|p\rangle = \tfrac{1}{2}p^2|p\rangle, \quad \Delta_p = \bar{\Delta}_p = \tfrac{1}{2}p^2, \quad p \in \mathbb{R} \tag{8.21}$$

и отвечают действию вершинных операторов $:\exp(ipX):\ |0\rangle$ на “истинный вакуум” с $p = 0$. Теперь однако - для состояний $|0; k, n\rangle$ (и отвечающих им полям!) правые и левые размерности

$$\Delta_{k,n} = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{R} + \frac{Rn}{2}\right)^2, \quad \bar{\Delta}_{k,n} = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{R} - \frac{Rn}{2}\right)^2, \quad k, n \in \mathbb{Z} \tag{8.22}$$

не совпадают при $n \neq 0$.

Так например при “самодуальном радиусе” $R = \sqrt{\alpha'} = \sqrt{2}$ для размерностей (8.22) получаем

$$\Delta_{k,n} = \frac{(k+n)^2}{4}, \quad \bar{\Delta}_{k,n} = \frac{(k-n)^2}{4} \tag{8.23}$$

и мы видим, что в теории возникают голоморфные и антиголоморфные токи с размерностями

$$\begin{aligned} &\Delta_{\pm1,\pm1} = 1, \quad \bar{\Delta}_{\pm1,\pm1} = 0 \\ &\Delta_{\pm1,\mp1} = 0, \quad \bar{\Delta}_{\pm1,\mp1} = 1 \end{aligned} \tag{8.24}$$

которым отвечают поля $J_\pm(z) =: \exp\left(\pm\sqrt{2}iX(z)\right):$ и $\bar{J}_\pm(\bar{z}) =: \exp\left(\pm\sqrt{2}i\bar{X}(\bar{z})\right):$, которые можно представить как экспоненты от голоморфной и антиголоморфной части полных операторов $X(z,\bar{z}) = X(z) + \bar{X}(\bar{z})$. Вместе с “обычными” операторами токов $H(z) = \sqrt{2}J(z) = i\sqrt{2}\partial X(z)$ (и комплексно-сопряженным для другой - антиголоморфной пары) они образуют алгебру токов Каца-Муди $\widehat{SL(2)}_1$ (проверить!)

$$\begin{aligned} H(z)J_\pm(z') &= \pm\frac{2}{z-z'}J_\pm(z') + \ldots \\ J_+(z)J_-(z') &= \frac{1}{(z-z')^2} + \frac{H(z')}{z-z'} + \ldots \\ H(z)H(z') &= \frac{2}{(z-z')^2} + \ldots \end{aligned} \tag{8.25}$$

В дополнении к тому, что мы уже говорили про эти операторы токов, заметим, что расширенная алгебра Каца-Муди возникает при компактификации струнной координаты на картановский тор ($R = \sqrt{2}$) соответствующей группы Ли.

Посмотрим теперь на полученный ответ для спектра, например, при $\frac{R^2}{\alpha'} = \frac{1}{2}$, что отвечает $R = 1$ при $\alpha' = 2$. Минимальные из размерностей

$$\Delta_{k,n} = \frac{(k+n/2)^2}{2}, \quad \bar{\Delta}_{k,n} = \frac{(k-n/2)^2}{2} \tag{8.26}$$

принимают значения $1/2$ и $1/8$.

8.3 Фермионизация при $R = 1$

Теперь, при $R = 1$ формула (8.14) для однопетлевой статсуммы принимает вид

$$Z = \frac{1}{\eta(q)\eta(\bar{q})} \sum_{n,k} q^{\frac{1}{2}\left(k+\frac{n}{2}\right)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}\left(k-\frac{n}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\eta\bar{\eta}} \sum_{k,m} \left(q^{\frac{1}{2}(k+m)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}(k-m)^2} + q^{\frac{1}{2}\left(k+m+\frac{1}{2}\right)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}\left(k-m-\frac{1}{2}\right)^2} \right) = \tag{8.27}$$

$$\underset{p=k+m, l=m-k}{=} \ \frac{1}{2\eta\bar{\eta}} \sum_{p,l} \left(q^{\frac{1}{2}p^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}l^2} + q^{\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}\left(l+\frac{1}{2}\right)^2} \right) \left(1 + (-1)^{p+l}\right)$$

где знаковый множитель осуществляет проекцию, учитывающую, что p и l одновременно либо четные, либо нечетные. Последняя сумма естественным образом разбивается на четыре вклада, т.е. ее можно переписать в виде

$$Z \sim \frac{1}{\eta\bar{\eta}} \sum_{\alpha} |\theta_\alpha|^2 \tag{8.28}$$

где наивно $\alpha = 1, 2, 3, 4$. На самом деле, поскольку мы обозначили

$$\theta_3 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}n^2}, \quad \theta_4 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}n^2} e^{i\pi n}, \quad \theta_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \tag{8.29}$$

а

$$\theta_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i\pi n} = \sum_{n\geq 0} q^{\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \left((-1)^n + (-1)^{-n-1}\right) \equiv 0 \tag{8.30}$$

в сумме (8.28) всего три члена.

Вспомним теперь формулу тройного произведения Якоби для тэта-функции

$$\Theta(t|q) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}k^2} t^k = \prod_{n>0} (1-q^n) \left(1 + q^{n-\frac{1}{2}} t\right) \left(1 + q^{n-\frac{1}{2}} t^{-1}\right) \tag{8.31}$$

которая сразу указывает на фермионную природу каждого из слагаемых. Из этой формулы следует, в частности

$$\begin{aligned} \frac{\theta_3}{\eta} &= \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}k^2}}{q^{1/24}\prod_{n>0}(1-q^n)} = q^{-1/24} \prod_{n>0} \left(1 + q^{n-\frac{1}{2}}\right)^2 = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{NS}}\ q^{L_0 - c/24} \\ \frac{\theta_4}{\eta} &= \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}k^2}(-)^k}{q^{1/24}\prod_{n>0}(1-q^n)} = q^{-1/24} \prod_{n>0} \left(1 - q^{n-\frac{1}{2}}\right)^2 = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{NS}}\ (-)^F q^{L_0 - c/24} \end{aligned} \tag{8.32}$$

что два слагаемых отвечают вычисленным ранее следам по пространству состояний в теории комплексного фермиона с центральным зарядом $c = 1$ и полуцелыми гармониками. В теории струн такие фермионы называются фермионами Неве-Шварца.

8.4 Сектор Рамона

Оставшийся вклад

$$\begin{gathered}\frac{\theta_2}{\eta} = \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}}{q^{1/24}\prod_{n>0}(1-q^n)} = q^{1/8-1/24}\frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}k^2}q^{k/2}}{\prod_{n>0}(1-q^n)} = \\ = q^{1/12}\prod_{n>0}(1+q^n)\left(1+q^{n-1}\right) = 2q^{1/12}\prod_{n>0}(1+q^n)^2 = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_R}\, q^{L_0-c/24}\end{gathered} \tag{8.33}$$

представляет собой статсумму в секторе Рамона, когда гармоники нумеруются целыми числами. Из формулы (8.33) сразу следует, например, что в этом секторе вакуум имеет ненулевую размерность. Поскольку

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_R}\, q^{L_0} \sim q^{1/8}\left(1+O(q)\right) \tag{8.34}$$

то эта минимальная размерность $1/8$ для теории комплексного фермиона, или $1/16$ - для вещественного. Можно считать, что рамоновский вакуум $|0\rangle_R = \sigma(0)|0\rangle_{NS}$ получается из "обычного" вакуума NS действием некоторого оператора (спинового или твиста) с соответствующей дробной размерностью. Операторное разложение фермионов с таким оператором σ содержит полуцелые степени.

Таким образом, мы доказали, что при радиусе $R=1$ для статсуммы в теории свободных бозонов можно написать

$$\begin{gathered} Z = \left(\sum_{n,m} e^{-S_{n,m}}\right)\left(\int_\Sigma d^2z\sqrt{g}\right)^{1/2}(\det{}'\Delta_0)^{-1/2} = \frac{1}{\eta(q)\eta(\bar q)}\sum_{n,k} q^{\frac{1}{2}\left(k+\frac{n}{2}\right)^2}\bar q^{\frac{1}{2}\left(k-\frac{n}{2}\right)^2} \sim \\ \sim \left|\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{NS}}\, q^{L_0-1/24}\right|^2 + \left|\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{NS}}\,(-)^F q^{L_0-1/24}\right|^2 + \left|\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_R}\, q^{L_0-1/24}\right|^2 = \\ = \sum_{(\epsilon_A,\epsilon_B)=(\pm,\pm)} \int D\tilde\psi D\psi D\tilde\psi^* D\psi^* \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{\Sigma_1} d^2z\left(\tilde\psi\bar\partial\psi + \tilde\psi^*\partial\psi^*\right)\right)\end{gathered} \tag{8.35}$$

где в правой части стоит сумма по граничным условиям для фермионов на торе

$$\begin{aligned} T_A\left(\tilde\psi,\psi,\tilde\psi^*,\psi^*\right) &= (-)^{\epsilon_A}\left(\tilde\psi,\psi,\tilde\psi^*,\psi^*\right) \\ T_B\left(\tilde\psi,\psi,\tilde\psi^*,\psi^*\right) &= (-)^{\epsilon_B}\left(\tilde\psi,\psi,\tilde\psi^*,\psi^*\right)\end{aligned} \tag{8.36}$$

При каноническом выборе (A,B)-циклов на торе знак ϵ_A разделяет фермионы на сектора Неве-Шварца и Рамона, а знак ϵ_B отличает вычисление статсуммы от статсуммы со вставленным дополнительным фермионным числом $(-)^F$.

При $R\neq 1$ фермионная интерпретация остается, но фермионы перестают быть свободными - точнее этот случай описывается безмассовой конформной моделью Тирринга

$$S = \frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2z\left(\tilde\psi\bar\partial\psi + \tilde\psi^*\partial\psi^* + g\tilde\psi\psi\tilde\psi^*\psi^*\right) \tag{8.37}$$

где константа достаточно просто зависит от радиуса $g = \frac{1-R^2}{1+R^2}$. Подробнее модель Тирринга рассмотрена в Приложении B.

Приложение

A Вычисление детерминанта

Вычислять детерминант оператора Ларласа на одномерном комплексном торе $\Sigma = \mathbb{C}/\Gamma$, (решетка Γ натянута на два вектора $(1, \tau)$ в комплексной плоскости) можно просто рассматривая оператор

$$\Delta = -\frac{\partial}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial}{\partial \xi_2^2} \tag{A.1}$$

действующий на функции

$$\Delta f(\xi_1, \xi_2) = \lambda f(\xi_1, \xi_2) \tag{A.2}$$

с периодическими граничными условиями ($\tau = \theta + iT$)

$$\begin{aligned} f(\xi_1 + 1, \xi_2) &= f(\xi_1, \xi_2) \\ f(\xi_1 + \theta, \xi_2 + T) &= f(\xi_1, \xi_2) \end{aligned} \tag{A.3}$$

Решается уравнение тривиально, представив $f(\xi_1, \xi_2) = e^{i\mu\xi_1 + i\nu\xi_2}$, тогда $\lambda = \mu^2 + \nu^2$, а сами "квазиимпульсы" μ и ν определяются из граничных условий (A.3):

$$\begin{gathered} e^{i\mu} = 1, \quad e^{i\mu\theta + i\nu T} = 1 \\ \mu = 2\pi n, \quad \mu\theta + \nu T = 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z} \end{gathered} \tag{A.4}$$

т.е.

$$\lambda_{n,k} = 4\pi^2 n^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}(k - \theta n)^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}|k - \tau n|^2 \tag{A.5}$$

Следовательно, детерминант оператора (A.2) (с выкинутой нулевой модой!) равен

$$\det{}'\Delta = \prod_{n,k}{}' \lambda_{n,k} = \prod_{n,k}{}' \frac{4\pi^2}{T^2}|k - \tau n|^2 \tag{A.6}$$

где штрих означает отсутствие члена с $n = k = 0$. Постараемся упростить вычисление, с этой целью разобьем произведение

$$\begin{gathered} \det{}'\Delta = \prod_{n,k}{}' \frac{4\pi^2}{T^2}|k - \tau n|^2 = \prod_{n,k}{}' \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot |D(\tau)|^2 \\ D(\tau) = \prod_{n,k}{}' (k - \tau n) \end{gathered} \tag{A.7}$$

Первый сомножитель мы уже практически вычисляли в теории частицы, без лишних деталей

$$\log\prod_{n,k}{}' \frac{4\pi^2}{T^2} = -\log T^2 \sum_{n,k}{}' 1 + \text{const} = -\log T^2 \left(\sum_{n,k} 1 - 1\right) + \text{const} = \\ = \log T^2 + \text{const} \tag{A.8}$$

так как $\sum_{k\in\mathbb{Z}} 1 = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 0$. С другой стороны

$$D(\tau) = \prod_{n,k}{}'(k - \tau n) = \prod_{k\neq 0} k \cdot \prod_{n\neq 0}\prod_{k}(k-\tau n) \sim \prod_{n\neq 0}\sin(\pi n\tau) \sim \\ \sim \left(\prod_{n>0} e^{-i\pi n\tau}\prod_{n>0}\left(1 - e^{2\pi i n\tau}\right)\right)^2 \sim \left(e^{i\pi\tau/12}\prod_{n>0}\left(1-e^{2\pi i n\tau}\right)\right)^2 = \eta(e^{2\pi i\tau})^2 \tag{A.9}$$

где мы опять использовали $\sum_{n>0} n = -\frac{1}{12}$, формулу произведения для синуса

$$\sin(\pi x) = \pi x\prod_{k>0}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \sim \prod_{k}(k - x) \tag{A.10}$$

и ввели функцию Дедекинда

$$\eta(q) = q^{1/24}\prod_{n>0}(1-q^n), \qquad \eta(e^{2\pi i\tau}) \sim \theta_*'(0|\tau)^{1/3} \tag{A.11}$$

где $\theta_*(z|\tau) = \theta_{11}(z|\tau)$ единственная нечетная на торе тэта-функция Якоби. Еще раз отметим, что все вычисления проводились с точностью до конечных констант и перенормировок введением соответствующих затравочных контрчленов.

B Фермионы и бозоны. Модель Тирринга

Обратимся к формулам (8.17) для состояний, которым отвечают операторы

$$\hat{V}_{k,n} =: \exp\left(i\alpha_{k,n}X(z) + i\bar{\alpha}_{k,n}\bar{X}(\bar{z})\right) : \tag{B.12}$$

где $\alpha_{k,n} = \frac{k}{R} + \frac{Rn}{2}$, $\bar{\alpha}_{k,n} = \frac{k}{R} - \frac{Rn}{2}$. Заметим, что при $R = 1$ среди этих операторов *нет* оператора с размерностями $(\Delta,\bar{\Delta}) = (\frac{1}{2}, 0)$ (или $(0,\frac{1}{2})$), буквально отвечающим фермионам, хотя имеется оператор $(\Delta,\bar{\Delta}) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, поскольку спин $\Delta - \bar{\Delta} = kn \in \mathbb{Z}$. Простейший способ добавить полуцелые спины - допустить в этих формулах полуцелые $k \in \mathbb{Z}/2$, т.е. расширить набор операторов (B.12) до

$$V_{m,n} =: \exp\left(i\beta_{m,n}X(z) + i\bar{\beta}_{m,n}\bar{X}(\bar{z})\right) : \\ \beta_{m,n} = \frac{m}{2R} + \frac{Rn}{2}, \quad \bar{\beta}_{m,n} = \frac{m}{2R} - \frac{Rn}{2}, \quad m,n\in\mathbb{Z} \tag{B.13}$$

так что теперь $\Delta - \bar{\Delta} = \frac{1}{2}mn \in \mathbb{Z}/2$. При $m, n = \pm 1$ имеем четыре оператора со спином $\frac{1}{2}$, которые при $R = 1$ естественно отождествить

$$\begin{aligned} V_{1,1} &=: e^{iX(z)} := \tilde{\psi}(z), \qquad V_{-1,-1} =: e^{-iX(z)} := \psi(z) \\ V_{1,-1} &=: e^{i\bar{X}(\bar{z})} := \tilde{\psi}^*(\bar{z}), \qquad V_{-1,1} =: e^{-i\bar{X}(\bar{z})} := \psi^*(\bar{z}) \end{aligned} \tag{B.14}$$

с голоморфными и антиголоморфными фермионами.

Давайте теперь считать эти формулы справедливыми при произвольном R, т.е. рассмотрим в такой теории поля

$$\begin{aligned} V_{1,1} &=: e^{i(\beta_+ X(z) + \beta_- \bar{X}(\bar{z}))} := \tilde{\psi}(z, \bar{z}), \\ V_{-1,-1} &=: e^{-i(\beta_+ X(z) + \beta_- \bar{X}(\bar{z}))} := \psi(z, \bar{z}) \\ V_{1,-1} &=: e^{i(\beta_- X(z) + \beta_+ \bar{X}(\bar{z}))} := \tilde{\psi}^*(z, \bar{z}), \\ V_{-1,1} &=: e^{-i(\beta_- X(z) + \beta_+ \bar{X}(\bar{z}))} := \psi^*(z, \bar{z}) \end{aligned} \tag{B.15}$$

где $\beta_\pm = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} \pm R\right)$, по прежнему со спином $\frac{1}{2}$, но более не являющиеся голоморфными или антиголоморфными. Тем не менее, из операторных разложений

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\varepsilon, \bar{\varepsilon})\psi(0,0) &= \varepsilon^{-\beta_+^2} \bar{\varepsilon}^{-\beta_-^2} \left(1 + i\varepsilon\beta_+ \partial X(0) + i\bar{\varepsilon}\beta_- \bar{\partial}X(0) + \ldots\right) \\ \tilde{\psi}^*(\varepsilon, \bar{\varepsilon})\psi^*(0,0) &= \varepsilon^{-\beta_-^2} \bar{\varepsilon}^{-\beta_+^2} \left(1 + i\varepsilon\beta_- \partial X(0) + i\bar{\varepsilon}\beta_+ \bar{\partial}X(0) + \ldots\right) \end{aligned} \tag{B.16}$$

в силу $\beta_+^2 - \beta_-^2 = 1$ можно определить токи

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = i\beta_+ \partial X(z) &= \boldsymbol{:}\tilde{\psi}\psi\boldsymbol{:}(z, \bar{z}) = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}}\, (\varepsilon\bar{\varepsilon})^{\beta_-^2} \tilde{\psi}(z + \varepsilon, \bar{z} + \bar{\varepsilon})\psi(z, \bar{z}) \\ \mathcal{I}^* = i\beta_+ \bar{\partial}X(\bar{z}) &= \boldsymbol{:}\tilde{\psi}^*\psi^*\boldsymbol{:}(z, \bar{z}) = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}}\, (\varepsilon\bar{\varepsilon})^{\beta_-^2} \tilde{\psi}^*(z + \varepsilon, \bar{z} + \bar{\varepsilon})\psi^*(z, \bar{z}) \end{aligned} \tag{B.17}$$

где нормальное упорядочение включает перенормировку, предел и “усреднение по направлениям”.

Заметим теперь, что вместо уравнений голоморфности при произвольном R возникают следующие соотношения

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\tilde{\psi} = \bar{\partial}V_{1,1} &=: i\beta_- \bar{\partial}\bar{X} e^{i(\beta_+ X + \beta_- \bar{X})} := \frac{\beta_-}{\beta_+} : i\beta_+ \bar{\partial}\bar{X} e^{i(\beta_+ X + \beta_- \bar{X})} := g\boldsymbol{:}\mathcal{I}^*\tilde{\psi}\boldsymbol{:} \\ \bar{\partial}\psi = \bar{\partial}V_{-1,-1} &=: -i\beta_- \bar{\partial}\bar{X} e^{-i(\beta_+ X + \beta_- \bar{X})} := -\frac{\beta_-}{\beta_+} : i\beta_+ \bar{\partial}\bar{X} e^{-i(\beta_+ X + \beta_- \bar{X})} := -g\boldsymbol{:}\mathcal{I}^*\psi\boldsymbol{:} \\ \partial\psi^* = \partial V_{-1,1} &=: -i\beta_- \partial X e^{-i(\beta_- X + \beta_+ \bar{X})} := -\frac{\beta_-}{\beta_+} : i\beta_+ \partial X e^{-i(\beta_+ X + \beta_- \bar{X})} := -g\boldsymbol{:}\mathcal{I}\psi^*\boldsymbol{:} \\ \partial\tilde{\psi}^* = \partial V_{1,-1} &=: i\beta_- \partial X e^{i(\beta_- X + \beta_+ \bar{X})} := \frac{\beta_-}{\beta_+} : i\beta_+ \partial X e^{-i(\beta_+ X + \beta_- \bar{X})} := g\boldsymbol{:}\mathcal{I}\tilde{\psi}^*\boldsymbol{:} \end{aligned} \tag{B.18}$$

где

$$g = \frac{\beta_-}{\beta_+} = \frac{1-R^2}{1+R^2} \tag{B.19}$$

В классическом пределе эти соотношения переходят в классические уравнения движения безмассовой модели Тирринга с действием (8.37).

C Статсуммы бозонных и фермионных струн

C.1 Интеграл Полякова для струн на торе

Результат вычисления однопетлевого континуального интеграла в теории бозонной струны приводит к уже известному нам результату

$$\begin{gathered}
\mathcal{F}_1 = \int_{\Sigma_1} DgDX \exp(-S[X,g]) = \mathcal{V}_D \int_{\mathcal{M}_1} \frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^2} \left(\frac{\det'\Delta}{\mathrm{Im}\tau}\right)^{-\frac{D-2}{2}} = \\
= \mathcal{V}_D \int_{\mathcal{M}_1} \frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^2} \left(\frac{\det'\Delta}{\mathrm{Im}\tau}\right)^{-\frac{D-2}{2}} = \mathcal{V}_D \int_{\mathcal{M}_1} \frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^{1+D/2}} \left|\eta(e^{2\pi i\tau})\right|^{-2(D-2)} = \\
\underset{D=26}{=} \ \mathcal{V}_{26} \int_{\mathcal{M}_1} \frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^{14}} \left|\eta(e^{2\pi i\tau})\right|^{-48}
\end{gathered} \tag{C.20}$$

который является результатом дополнительного интегрирования статсуммы свободного скалярного поля по пространству конформных классов двумерных метрик. Вспомним основные этапы и существенные подробности вычисления:

- Число координат струны или размерность пространства-времени фиксируется условием сокращения конформной аномалии $D + c_{bc} = D - 26 = 0$ или равенством нулю полного центрального заряда;

- Функция Дедекинда, считающая вклад струнного спектра, входит при этом в степени $\eta(q)^{D-2} = \eta(q)^{24}$ на двойку меньше наивной размерности, что отвечает сокращению двух нефизических направлений духами, представленными bc-системой;

- Полученная мера интегрирования по пространству модулей ковариантна относительно модулярных преобразований, а в силу разложения

$$\begin{gathered}
\eta(e^{2\pi i\tau}) = e^{i\pi\tau/12} \prod_{n>0} \left(1 - e^{2\pi i n\tau}\right) = e^{i\pi\tau/12} \left(1 - e^{2\pi i\tau} + \ldots\right) \\
\left|\eta(e^{2\pi i\tau})\right|^{-48}\Big|_{\mathrm{Re}\tau=0} = e^{4\pi \mathrm{Im}\tau} + 576 e^0 + O(e^{-4\pi\mathrm{Im}\tau})
\end{gathered} \tag{C.21}$$

воспроизводит вклады всех струнных состояний в однопетлевую поправку к свободной энергии.

Скажем вкратце, что изменится для теории фермионной струны с действием

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_\Sigma \left(\bar\partial X_\mu \partial X_\mu + \Psi_\mu \bar\partial \Psi_\mu + \bar\Psi_\mu \partial \bar\Psi_\mu + \chi \Psi_\mu \bar\partial X_\mu + \bar\chi \bar\Psi_\mu \partial X_\mu + \frac{1}{2}\bar\chi\chi\bar\Psi_\mu\Psi_\mu\right) \tag{C.22}$$

представляющем собой прямое обобщение действия для фермионной частицы:

- Точно также как двумерная конформная симметрия возникала в роли остаточной репараметризационной инвариантности при выборе метрики в конформном виде, остаточная локальная суперсимметрия на мировом листе сведется к суперконформным преобразованиям. Суперконформную алгебру образуют тензор энергии импульса $T = -\frac{1}{2}(\partial X_\mu)^2 - \frac{1}{2}\Psi_\mu\partial\Psi_\mu$ и суперток $G = \Psi_\mu \partial X_\mu$;

$$\begin{aligned} T(z)T(z') &= \frac{3D}{4(z-z')^4} + \frac{2}{(z-z')^2}T(z') + \frac{\partial T(z')}{z-z'} + \dots \\ T(z)G(z') &= \frac{3/2}{(z-z')^2}G(z') + \frac{\partial G(z')}{z-z'} + \dots \\ G(z)G(z') &= -\frac{D}{(z-z')^3} - \frac{2}{z-z'}T(z') + \dots \end{aligned} \tag{C.23}$$

- Условие сокращения конформной аномалии примет вид

$$c_X + c_\Psi + c_{bc} + c_{\beta\gamma} = D + D/2 - 26 + 11 = 3D/2 - 15 = 0 \tag{C.24}$$

  где $c_{\beta\gamma} = 2(6j^2 - 6j + 1)$ - центральный заряд бозонной супердуховой системы первого порядка $S_{\beta\gamma} = \frac{1}{\pi}\int_\Sigma \beta\bar\partial\gamma$ с $j = -\frac{1}{2}$, отвечающей суперконформным преобразованиям. Условие сокращения аномалии приводит к критической размерности $D = 10$.

Континуальный интеграл на торе

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 = \int DgD\chi DXD\Psi \,\times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_\Sigma \bar\partial X\partial X + \Psi\bar\partial\Psi + \bar\Psi\partial\bar\Psi + \chi\Psi\bar\partial X + \bar\chi\bar\Psi\partial X + \frac{1}{2}\bar\chi\chi\bar\Psi\Psi\right) = \\ = \mathcal{V}_D \int_{\mathcal{M}_1} \frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\tau)^2}\,[\dots]_X\,[\dots]_\Psi \end{aligned} \tag{C.25}$$

представляется опять же в виде интеграла по промтранству модулей от некой меры, выражение для которой факторизуется на вклады бозонных и фермионных полей. Вклад бозонных координат

$$[\dots]_X = \left(\frac{\det'\Delta}{\mathrm{Im}\tau}\right)^{-\frac{D-2}{2}} \underset{D=5}{=} \left(\frac{\det'\Delta}{\mathrm{Im}\tau}\right)^{-4} = \frac{1}{\mathrm{Im}\tau^4}\frac{1}{|\eta(q)|^{16}} \tag{C.26}$$

отличается от вклада в бозонную струну только степенью, определяемой критической размерностью.

Остается вычислить вклад фермионов. Мы уже видели, что для двух вещественных фермионов (или одного комплексного) такие вклады даются в зависимости от граничных условий выражениями типа $\theta_\alpha(q)/\eta(q)$ - в каждом секторе и при различных граничных условиях. В теории фермионной струны всего $D = 10$ вещественных фермионов, или $D/2 = 5$ комплексных, поэтому ответ может быть пропорционален четвертой степени ответа для одного комплексного фермиона (точнее некоторой их комбинации), так как пятая степень будет сокращаться вкладом супердухов. Мы можем попытаться написать тем самым

$$[\ldots]_\Psi = \frac{1}{\eta(q)^4\eta(\bar{q})^4}\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}\theta_\alpha(q)^4\theta_\beta(\bar{q})^4 \tag{C.27}$$

где суммирование производится по граничным условиям (независимо для левых и правых фермионов Ψ и $\bar{\Psi}$ с некоторыми коэффициентами $C_{\alpha\beta}$, которые не очень понятно как определять.

C.2 Модулярная инвариантность

Модулярные преобразования на пространстве модулей тора (или пространстве Тейхмюллера - верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\tau \geq 0$ с метрикой Лобачевского $ds^2 = \frac{d\tau d\bar{\tau}}{\mathrm{Im}\tau^2}$):

- $\tau \to -1/\tau$:

$$\begin{aligned} \eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau), \quad \theta_3(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\theta_3(\tau) \\ \theta_2(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\theta_4(\tau), \quad \theta_4(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\theta_2(\tau) \end{aligned} \tag{C.28}$$

- $\tau \to \tau + 1$:

$$\begin{aligned} \eta(\tau+1) = e^{i\pi/12}\eta(\tau), \quad \theta_2(\tau+1) = (i)^{1/2}\theta_2(\tau) \\ \theta_3(\tau+1) = \theta_4(\tau), \quad \theta_4(\tau+1) = \theta_3(\tau) \end{aligned} \tag{C.29}$$

Модулярно-инвариантные выражения: легко проверить, что инвариантами являются $\frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau^2}$ и $\mathrm{Im}\tau\eta(q)^2\eta(\bar{q})^2 = \mathrm{Im}\tau|\eta(q)|^4$, по крайней мере с точностью до числовых факторов. Инвариантом также является диагональная комбинация $\sum_\alpha \left|\frac{\theta_\alpha(q)}{\eta(q)}\right|^{2N}$ при любом N - например, статсумма (8.14) бозона на окружности радиуса $R = 1$ при $N = 1$. При $N = 4$ это выражение могло бы служить кандидатом на $[\ldots]_\Psi$.

Однако физический кандидат имеет другой вид, а именно

$$[\ldots]_\Psi = Z_\Psi(\tau)Z_{\bar{\Psi}}(\bar{\tau}) \tag{C.30}$$

где

$$Z_\Psi(\tau) \simeq \frac{1}{\eta(q)^4}\left(\theta_3(q)^4 - \theta_4(q)^4 - \theta_2(q)^4\right) \tag{C.31}$$

что отвечает суперсимметричной GSO-проекции в спектре фермионной струны, обеспечивающей пространственную (т.е. 10-мерную) суперсимметрию.

Попробуем преобразовать правую часть (C.31). Напишем сначала

$$\begin{gathered}
\tfrac{1}{2}\left(\theta_3(q)^4 - \theta_4(q)^4\right) = \tfrac{1}{2}\sum_{n_1,\ldots,n_4\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}\sum_i n_i^2}\left(1-(-1)^{\sum n_i}\right) = \sum_{n_1,\ldots,n_4\in\mathbb{Z}}^{\sum n_i=\mathrm{odd}} q^{\frac{1}{2}\sum_i n_i^2} \\
\tfrac{1}{2}\theta_2(q)^4 = \tfrac{1}{2}\sum_{r_1,\ldots,r_4\in\mathbb{Z}+1/2} q^{\frac{1}{2}\sum_i r_i^2}\left(1+(-1)^{\sum r_i}\right) = \sum_{r_1,\ldots,r_4\in\mathbb{Z}+1/2}^{\sum r_i=\mathrm{even}} q^{\frac{1}{2}\sum_i r_i^2}
\end{gathered} \tag{C.32}$$

Суммы в правых частях проходят по решеткам Γ и Γ' в четырехмерном пространстве, которые связаны преобразованием

$$\begin{gathered}
r_1 = \tfrac{1}{2}\sum_i n_i, \quad r_2 = \tfrac{1}{2}\left(n_1+n_2-n_3-n_4\right), \quad r_3 = \tfrac{1}{2}\left(n_1-n_2-n_3+n_4\right), \\
r_4 = \tfrac{1}{2}\left(n_1-n_2+n_3-n_4\right)
\end{gathered} \tag{C.33}$$

из группы $SO(4)$, а значит эти суммы равны. Таким образом, построенная в (C.31) однопетлевая статсумма в теории десятимерных суперструн (а значит и соответствующая однопетлевая поправка к свободной энергии) *равна нулю* в силу тождеств Римана для тэта-функций.