Темы курсовых работ
на 2016-2017 учебный год
профессор Т.Такебе

Если студент не контактирует с Такебе достаточно часто, Такебе откажет от дальнейшего руководства.

1-2 курс	**1. Ортогональные многочлены.** В линейном пространстве многочленов R[x] (и в C[x]) можно определять разные скалярные произведения с помощью интеграла. Ортогональные многочлены - естественные ортонормированные базисы этого пространства и имеют интересные свойства. *Пример задач*: - Вывод формулы Christoffel-Darboux и её приложение. - Вывод формулы квадратуры Гаусса и конкретное вычисление с этой формулой. Литература: Gabor Szego "Orthogonal Polynomials" Ch. II & III (with examples in Ch. IV & V) или русский перевод этой книги. (Интеграл Лебега использован, но не существен для нас.) Полиа, Сеге «Задачи и теоремы из анализа» Например, Отдел Шестой.
1-3 курс	**1. Эллиптические интегралы и эллиптические функции** Эллиптический интеграл – определённый или неопределенный интеграл функции R(t, P(t)), где R(t,x) – рациональная функция двух переменных, P(t) – квадратный корень из полинома третьей или четвёртой степени с несовпадающими корнями. В общем случае, эллиптический интеграл не может быть выражен в элементарных функциях. Но такой интеграл и обратная функция неопределённого интеграла (эллиптическая функция) появляются в разных проблемах математики и физики. Например: длина эллипса, длина графиков тригонометрических функций, движение маятника, форма скакалки, форма волны… *Пример задач*: - приложения и классификация эллиптических интегралов, (**для 1-2 курса**) - дифференциальные уравнения для эллиптических функций и их приложения, (**для 2-3 курса**) - формулы сложения эллиптических функций (разные доказательства известны; с помощью теории функций комплексной переменной, с помощью дифференциальных уравнений, геометрическое доказательство Якоби с помощью движения маятника, …) ***(для 3 курса)*** Литература: сами найдите. Например, записки лекций Такебе: https://math.hse.ru/elliptic_functions
2-3 курс	**1. Солитоны** Известно, что дифференциальные уравнения в частных производных, которые являются нелинейными по неизвестной функции, вообще очень трудно

	решать. Но специальные уравнения (уравнение КдФ, уравнение КП, цепочка Тоды, …) можно решить забавными вычислениями рядов дифференциальных операторов. *Примеры задач*: - явная формула для 2-солитоного решения (u(t,x) = ...) КдФа; явная формула тау-функции находится в разных литературах. - явная формула для N-солитоного решения КдФа. - "Visualization" таких решений. Например, посмотрите http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~takasaki/soliton-lab/gallery/solitons/index-e.html - вывод уравнения Буссинеска (Boussinesq equation) из иерархии КП - 1,2,...N-солитоные решения Бусинеска: тау-функция - почти такая же как КдФ. А u(t,x)? Visualization? - разные явные решения КдФа, Буссинеска, КП, ... (примеры: алгебро-геометрическое решение Кричевера; решение, тау-функция которого является функцией Шура; ...) Литература: Т. Мива, М. Джимбо, Э. Датэ «Солитоны» гл. 1, 2, 3. ***(для 2 курса)*** Дальше. гл. 4-6: решения дифференциальных уравнений с помощью алгебры Клиффорда. ***(для 3 курса)*** (Теория функции комплексной переменной немного использована, но можно обходить.) **2. Теория Сато иерархии КП** Решение иерархии КП, одной из интегрируемых систем нелинейных дифференциальных уравнений с бесконечным числом переменных и неизвестных, соответствует точке бесконечномерным Грассманниана. Это красивое соответствие описывается и фермионами (смотрите вышеуказанную литературу Мивы, Джимбо и Датэ), и непосредственным образом без фермионов (подход Сато). *Примеры задач*: - обобщение подхода Сато на другие иерархии (мКП, B-КП, Тода,…) - интерпретации других методов решений интегрируемых уравнений (метод обратного рассеяния, алгебро-геометрический метод,…) с точки зрения теории Сато. Литература: M. Noumi, T. Takebe «Algebraic analysis of integrable hierarchies» (черновик книги). **3. Уравнение Пэнлеве** Сто лет назад П. Пэнлеве (P. Painleve) и его ученик Б. Гамбие (B. Gambier) классифицировали обыкновенные дифференциальные уравнение второго порядка и нашли шесть специальных уравнений, которые сегодня называются «уравнениями Пэнлеве» (Painleve equations). Раньше они считались «изолированной математикой». Но после обнаружений физиков в 1970-ых годах оказалось, что такие уравнения связаны с разными областями математики (например: алгебраическая геометрия поверхностей, группа Вейля (Weyl group), интегрируемые системы,…). *Примеры задач*: - явное описание действие группы Вейля на тау-функцию - особые решения рационального/гипергеометрического типа

	Литература: M. Noumi, Painlevé equations through symmetry, Translations of Mathematical Monographs 223, American Mathematical Society, ISBN 978-0-8218-3221-9 **3. Комбинаторика (плоские разбиения, непересекающиеся пути) и линейная алгебра** Плоское разбиение – трёхмерное обобщение диаграммы Юнга. Число плоских разбиений в определённом ящике равно числу непересекающихся путей на некотором графе. А число непересекающихся путей на графе вычисляется определителем и функциями Шура. *Примеры задач*: - Доказательство формулы Макмагона (Macmahon formula) ***(для 2-3 курса***) - Вычисление симметрических плоских разбиений с помощью формулы ЛГВ ***(для 2-3 курса)*** Литература: D. M. Bressoud, Proofs and Confirmations, Cambridge University Press. K. Takasaki, Linear algebra and enumeration, в японском журнале «Sugaku-seminar» («Семинар по математике», журнал похожий на «Квант»); Такебе переводил этот текст на русский язык. Е. Ю. Смирнов, «Диаграммы Юнга, Плоские разбиения и знакочередующиеся матрицы», МЦНМО. A. Okounkov, N. Reshetikhin, C. Vafa, Quantum Calabi-Yau and Classical Crystals, in “The Unity of Mathematics” ed. P. Etingof, V. Retakh, I. M. Singer, Birkhauser.
3 курс	**1. Уравнение Лёвнера** Теорема Римана утверждает, что на каждой односвязной области D существует голоморфная функция f(z), которая является однозначным соответствием между D и единичным диском. Если D деформируется по параметру t некоторым образом, то f(z) зависит от t и удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению, которое называется уравнением Лёвнера (Loewner equation). *Примеры задач*: - Доказательство уравнения Лёвнера. - Доказательство уравнения Лёвнера хордового типа (chordal Loewner equation). - Доказательство гипотеза Бибербаха (Bieberbach conjecture) (высшая проблема). Литература: P. L. Duren, Univalent Functions, Grundlehren der mathematicschen Wissenschaften 259, Springer Verlag.