Листок 05. Срок сдачи 25 ноября 2016 года.

Для сдачи каждой из задач 5.1 — 5.5 необходимо чисто рассказать одному преподавателю столько пунктов этой задачи, сколько преподаватель сочтет нужным выслушать. Задачи со звездочкой сдаются и фиксируются в кондуите, но в баллах не оцениваются.

05.01. Формула Тейлора.

а) Докажите, что если функция $f^{(n)}(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $f(x)$ – многочлен степени меньше n.

б) Докажите формулу Тейлора для многочленов: если $P(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$, то при любых $x, a \in \mathbb{R}$

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

в) Функция f определена в окрестности точки a, дифференцируема в ней n раз и $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$. Докажите, что тогда в окрестности точки a $f(x) = o((x-a)^n)$.

г) Докажите, что если функция f $n-1$ раз дифференцируема в окрестности точки a и существует $f^{(n)}(a)$, то имеет место формула:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

(Это формула Тейлора с остаточным членом $R_n(x,a)$ в форме Пеано).

05.02. Формула Тейлора (продолжение) Пусть функция f дифференцируема n раз в окрестности точки a и $f^{(n+1)}$ существует на интервале (a,x) (или (a,x), если $x < a$). Положим

$$F(t) = f(x) - \left[f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right].$$

а) Вычислите $F'(t)$.

б) Примените к паре функций $F(t)$ и $x-t$ теорему Коши (которая обобщает формулу Лагранжа) на промежутке $[a,x]$ и получите отсюда формулу остаточного члена в форме Коши:

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a).$$

в) Примените к паре функций $F(t)$ и $x-t$ теорему Коши на промежутке $[a,x]$ и получите отсюда формулу остаточного члена в форме Лагранжа

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}.$$

05.03. Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций. Для доказательства используем оценки остаточного члена из предыдущей задачи.

а) Выведите, что для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

б) Выведите следующие равенства и объясните, для каких значений x они справедливы:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \qquad (x+1)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

в) Докажите, что

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \ldots$$

05.04.

а) Проверьте, что функция $f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, причём $f^{(n)}(0) = 0$ при всех натуральных n.

б) Нарисуйте эскизы графиков функций f, f' и f''.

в) Приведите пример всюду бесконечно дифференцируемой функции, равной нулю вне заданного интервала и отличной от нуля внутри него.

05.05. Пусть f бесконечно дифференцируемая в окрестности нуля функция.

а) Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$. Докажите, что $a_k = \frac{f^k(0)}{k!}$.

б) Пусть

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n).$$

Найдите разложение Маклорена для функции f.

в) Найдите разложение в ряд Маклорена функции $\operatorname{arctg} x$ и докажите, что он сходится при $|x| < 1$.

05.06.* Докажите, что

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots$$

05.07.* Пусть $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \dfrac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \dfrac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h)$ $(0 < \theta < 1)$, причем $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. Докажите, что $\lim\limits_{h \to 0} \theta = (n+1)^{-1}$.

05.08.* Функция $F(x)$ задана на положительной полуоси и непрерывна. Известно, что для любого $x > 0$ последовательность $F(nx)$ имеет предел. Обязательно ли существует предел функции F на бесконечности?