

4.1 (тождество поляризации). Пусть f — полуторалинейная форма на векторном пространстве H . Зафиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, и пусть $\zeta \in \mathbb{C}$ — корень из 1 степени n , $\zeta \neq \pm 1$. Докажите, что

$$f(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k f(x + \zeta^k y, x + \zeta^k y).$$

Тождество поляризации позволяет, в частности, восстановить скалярное произведение на евклидовом пространстве из порожденной этим скалярным произведением нормы.

4.2. Покажите, что норма на пространствах $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, ℓ^p , $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$, $L^p(X, \mu)$ (где (X, μ) — «почти любое» (объясните, что это значит) пространство с мерой) при $p \neq 2$ и $n > 1$ не порождается никаким скалярным произведением.

4.3. Придумайте обобщение тождества параллелограмма на случай n векторов.

4.4. Покажите, что норма на пространствах ℓ^p , $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$, $L^p(X, \mu)$ (где (X, μ) — «достаточно большое» (объясните, что это значит) пространство с мерой) при $p \neq 2$ не эквивалентна никакой норме, порожденной скалярным произведением.

4.5. Пусть $H = C[-1, 1]$ со скалярным произведением $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} dt$. Положим

$$H_0 = \left\{ f \in H : \int_{-1}^0 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt \right\}.$$

(a) Докажите, что H_0 — замкнутое векторное подпространство в H .

(b) Верно ли, что $H = H_0 \oplus H_0^\perp$?

4.6. Докажите, что в любом неполном евклидовом пространстве H существует такое замкнутое векторное подпространство H_0 , что $H_0 \oplus H_0^\perp \neq H$.

4.7. Докажите, что пространство $C_c^\infty(a, b)$ гладких функций на интервале (a, b) с компактным носителем плотно в $L^p[a, b]$ для всех $1 \leq p < \infty$.

Определение 4.1. Пусть $f \in L^2[a, b]$. Функция $f' \in L^2[a, b]$ называется *обобщенной производной* функции $f \in L^2[a, b]$, если

$$\int_a^b f' \varphi dt = - \int_a^b f \varphi' dt$$

для всех $\varphi \in C_c^\infty(a, b)$.

4.8. Докажите, что если $f \in L^2[a, b]$ обладает обобщенной производной f' , то f' единственна (как элемент пространства $L^2[a, b]$).

4.9. Пространство Соболева $W^{1,2}(a, b)$ определяется как множество всех $f \in L^2[a, b]$, обладающих обобщенной производной $f' \in L^2[a, b]$. Докажите, что $W^{1,2}(a, b)$ — гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b (f \bar{g} + f' \bar{g}') dt.$$

4.10 (*пространство Харди*). Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Обозначим через H^2 пространство всех голоморфных функций $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$\|f\| = \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi \right)^{1/2} < \infty.$$

(а) Докажите, что отображение $f \mapsto (c_n(f))_{n \geq 0}$, где $c_n(f)$ — n -ый тейлоровский коэффициент функции f в нуле, является изометрическим изоморфизмом между $(H^2, \|\cdot\|)$ и $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$. Таким образом, H^2 — гильбертово пространство.

(б) Докажите, что для каждого $w \in \mathbb{D}$ линейный функционал $F_w: H^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $F_w(f) = f'(w)$, ограничен.

(с) В силу теоремы Рисса и п. (б), для каждого $w \in \mathbb{D}$ существует единственная функция $g_w \in H^2$, удовлетворяющая условию $F_w(f) = \langle f, g_w \rangle$ для всех $f \in H^2$. Найдите явную формулу для $g_w(z)$.

4.11-В (*пространство Бергмана*). Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Обозначим через $L_a^2(\mathbb{D})$ пространство всех голоморфных функций $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$\|f\| = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(x + iy)|^2 dx dy \right)^{1/2} < \infty.$$

(а) Докажите, что $L_a^2(\mathbb{D})$ — замкнутое векторное подпространство в $L^2(\mathbb{D})$. Следовательно, $L_a^2(\mathbb{D})$ — гильбертово пространство.

(б) Докажите, что для каждого $w \in \mathbb{D}$ линейный функционал $F_w: L_a^2(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$, $F_w(f) = f(w)$, ограничен.

(с) В силу теоремы Рисса и п. (б), для каждого $w \in \mathbb{D}$ существует единственная функция $g_w \in L_a^2(\mathbb{D})$, удовлетворяющая условию $F_w(f) = \langle f, g_w \rangle$ для всех $f \in L_a^2(\mathbb{D})$. Найдите явную формулу для $g_w(z)$.

Может возникнуть искушение использовать тождество поляризации для того, чтобы «доказать», что *любая* норма порождается скалярным произведением. Разумеется, последнее утверждение неверно (см. задачу 4.2), однако оно оказывается верным при выполнении тождества параллелограмма:

4.12-В (*теорема фон Нойманна–Йордана*). Пусть H — нормированное пространство, в котором выполняется тождество параллелограмма. Покажите, что формула

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2 \quad (x, y \in H)$$

задает скалярное произведение на H , и что норма, порожденная этим скалярным произведением, совпадает с исходной.