5.1. Существует ли такая функция $f \in L^2[0,1]$, что $\int_0^1 f(t)g(t)\,dt = g(0)$ **(a)** для каждого многочлена g степени $\leqslant n$; **(b)** для каждого многочлена g?

5.2. Постройте изометрические изоморфизмы **(a)** $\ell^\infty \xrightarrow{\sim} (\ell^1)^*$; **(b)** $\ell^1 \xrightarrow{\sim} (c_0)^*$;
(c) $\ell^q \xrightarrow{\sim} (\ell^p)^*$, где $1 < p, q < +\infty$ и $1/p + 1/q = 1$. Можно ли тем же способом построить изометрический изоморфизм $\ell^1 \cong (\ell^\infty)^*$?

5.3-B. Докажите, что c_0 не является топологически изоморфным сопряженному ни к какому нормированному пространству.

5.4-B. Пусть (X, μ) — пространство с σ-конечной мерой. Постройте изометрические изоморфизмы **(a)** $L^\infty(X,\mu) \xrightarrow{\sim} (L^1(X,\mu))^*$; **(b)** $L^p(X,\mu) \xrightarrow{\sim} (L^q(X,\mu))^*$, где $1 < p, q < +\infty$ и $1/p + 1/q = 1$.
Подсказка. Для доказательства сюръективности построенных отображений пригодится теорема Радона–Никодима.

5.5. Докажите, что линейный функционал на нормированном пространстве ограничен тогда и только тогда, когда его ядро замкнуто. Верно ли аналогичное утверждение для линейных операторов?

5.6. Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство, $h \in X \setminus X_0$. Докажите, что существует такой $f \in X^*$, что $\|f\| = 1$, $f|_{X_0} = 0$ и $f(h) = \mathrm{dist}(h, X_0)$.

5.7. Докажите, что на любом бесконечномерном нормированном пространстве существует разрывный линейный функционал.

Подсказка: воспользуйтесь тем, что в любом векторном пространстве есть алгебраический базис (т.е. максимальное линейно независимое подмножество).

5.8. Пусть X — нормированное пространство.
(a) Докажите, что если X^* сепарабельно, то и X сепарабельно.
(b) Верно ли обратное?
(c) Покажите, что не существует топологического изоморфизма между $(\ell^\infty)^*$ и ℓ^1.

5.9 (*необходимость полноты в теореме Банаха–Штейнгауза*)**.** Приведите пример нормированного пространства X и последовательности (f_n) в X^*, ограниченной на каждом векторе (т.е. такой, что для каждого $x \in X$ последовательность $(f_n(x))$ ограничена), но не ограниченной по норме.

5.10. Пусть X, Y, Z — нормированные пространства.
(a) Докажите, что билинейный оператор $T\colon X \times Y \to Z$ непрерывен тогда и только тогда, когда существует такое $C \geqslant 0$, что $\|T(x,y)\| \leqslant C\|x\|\|y\|$ для всех $x \in X,\ y \in Y$.
(b) Предположим, что X либо Y полно. Докажите, что любой раздельно непрерывный билинейный оператор $X \times Y \to Z$ непрерывен. (Раздельная непрерывность здесь означает, что для любых $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ отображения $Y \to Z$, $y \mapsto T(x_0, y)$, и $X \to Z$, $x \mapsto T(x, y_0)$, непрерывны. *Указание:* воспользуйтесь теоремой Банаха–Штейнгауза).
(c) Верно ли утверждение из п. (b) без предположения о полноте?

5.11-B. Пусть G — компактная топологическая группа и π — ее представление в банаховом пространстве X, непрерывное в том смысле, что отображение $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto \pi(g)x$, непрерывно. Докажите, что на X существует эквивалентная норма, относительно которой все операторы $\pi(g)$ изометричны.

5.12. (a) Выведите теорему об обратном операторе из теоремы о замкнутом графике.
(c) Выведите теорему Банаха–Штейнгауза из теоремы о замкнутом графике.

5.13 (*необходимость полноты в теореме Банаха об обратном операторе*)**. (a)** Приведите пример банахова пространства X, нормированного пространства Y и биективного ограниченного линейного оператора $T\colon X \to Y$, обратный к которому неограничен.
(b)-B Приведите пример нормированного пространства X, банахова пространства Y и биективного ограниченного линейного оператора $T\colon X \to Y$, обратный к которому неограничен.

5.14. Предположим, что пространство $L^1(\mathbb{R})$ полно относительно некоторой нормы $\|\cdot\|$, причем из сходимости $f_n \to f$ по этой норме следует, что $\int_{-\infty}^t f_n(s)\,ds \to \int_{-\infty}^t f(s)\,ds$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Докажите, что норма $\|\cdot\|$ эквивалентна обычной норме на $L^1(\mathbb{R})$.