

Анализ 1 курс.
Дифференциальное исчисление 1 переменной.
Индивидуальное письменное задание

Срок сдачи: пятница 2 декабря 2016.

Решение каждой задачи должно сопровождаться подробными выкладками и объяснениями.

Работа состоит из шести задач. По k -ой задаче ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) студент выбирает задание под номером m ($m = 1, 2, \dots, 23$), где m вычисляется по следующей формуле:

$$m = 1 + (\text{остаток от деления числа } N + A^{B+k} \text{ на } 23),$$

где N — номер студента в списке курса в кондуите по анализу,

A — число букв в имени студента, а B — число букв в его фамилии.

1. Вычислить предел двумя способами:

- а) используя формулы Тейлора
- б) с помощью правила Лопиталья

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - e^{-x} - 3x - 1}{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \ln(1+x) - 6x - 2x^3}{e^{-x} + x - 1}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^{-2} - \cos x - 2x}{x^2}$
- (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2) \ln(1+x) - \operatorname{arctg} x}{x^3}$
- (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 \cos x - 2}{x^4}$
- (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos 2x - 2x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}$
- (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x} + x - 1}{1 - \cos x}$
- (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x - \operatorname{arctg} x}$
- (10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2 + \sin x + \ln(1-x)}{x^3}$
- (11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2 + x + \ln(1-x)}{x - \operatorname{arctg} x}$
- (12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - x^2/2}$
- (13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\ln(1-2x) + 2x + 2x^2}$
- (14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+4x^2} - e^{2x} + 2x}$
- (15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + x^2/2 - \sin x}{x^3}$
- (16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - e^{-x} - 3x/2}{x^2}$
- (17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin 2x + 2 \ln(1-x) + x^2}$
- (18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \ln(1+x) + \sin x}{x^3}$
- (19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + \ln(1+2x) - 2x}{x^3}$
- (20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\ln(1-2x) + e^{2x} - 1}$
- (21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}$
- (22) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \ln(1+x) + x - 1}{x^3}$
- (23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1 - x^2/2}{x^3}$

2. Построить график рациональной функции $y = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2 + px + q}$.

- (1) $a = 1, b = 1, c = 0, d = -1, p = 0, q = -1$.
- (2) $a = 1, b = 1, c = 0, d = -4, p = 0, q = -4$.
- (3) $a = 1, b = 1, c = -3, d = 2, p = -3, q = 2$.
- (4) $a = 1, b = 1, c = -1, d = -2, p = -1, q = -2$.
- (5) $a = 1, b = -2, c = 0, d = 0, p = -2, q = 1$.
- (6) $a = 1, b = -1, c = 0, d = 0, p = 2, q = -1$.

- (7) $a = 1, b = 3, c = 3, d = 1, p = -2, q = 1.$
- (8) $a = -1, b = 2, c = 0, d = -6, p = 0, q = -3.$
- (9) $a = -2, b = 2, c = 0, d = -6, p = 0, q = -3.$
- (10) $a = -3, b = 2, c = 0, d = -6, p = 0, q = -3.$
- (11) $a = 3, b = -2, c = 0, d = 2, p = 0, q = -1.$
- (12) $a = 2, b = -1, c = -1, d = 6, p = 1, q = -6.$
- (13) $a = -2, b = 1, c = -1, d = 6, p = 1, q = -6.$
- (14) $a = 3, b = 3, c = -3, d = -6, p = -1, q = -2.$
- (15) $a = -3, b = -4, c = -4, d = 24, p = 1, q = -6.$
- (16) $a = 1, b = 1, c = 1, d = -2, p = 1, q = -2.$
- (17) $a = 2, b = -1, c = 3, d = -2, p = -3, q = 2.$
- (18) $a = 2, b = 1, c = -4, d = 3, p = -4, q = 3.$
- (19) $a = -2, b = -1, c = 2, d = 3, p = -2, q = -3.$
- (20) $a = -2, b = -4, c = -8, d = 12, p = 2, q = -3.$
- (21) $a = -2, b = -2, c = 10, d = -12, p = -5, q = 6.$
- (22) $a = 3, b = 4, c = -4, d = -24, p = -1, q = -6.$
- (23) $a = 1, b = 3, c = 15, d = 18, p = 5, q = 6.$

3. Построить график функции:

- (1) $y = \sqrt[3]{x^2}e^{-x}$
- (2) $y = \frac{e^{2x+2}}{2x+2}$
- (3) $y = xe^{-x^2}$
- (4) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
- (5) $y = \sqrt{x^3} \ln x$
- (6) $y = \frac{x}{\ln x}$
- (7) $y = e^{1/x} - x$
- (8) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$
- (9) $y = xe^{1/(2-x)}$
- (10) $y = x^2 - \ln|x|$
- (11) $y = (2x+5)e^{-2x-4}$
- (12) $y = e^{1/(x^2-4x+4)}$
- (13) $y = 2 \ln \left(1 - \frac{4}{x}\right) - 3$
- (14) $y = (1+x)e^{1/x}$
- (15) $y = x(2 - \ln x)^2$
- (16) $y = 3 \ln \frac{x}{x-3} - 1$
- (17) $y = \frac{e^{2-x}}{2-x}$
- (18) $y = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$
- (19) $y = 3 - 3 \ln \frac{x}{x+4}$
- (20) $y = 2 \ln \frac{x+3}{x} - 3$
- (21) $y = xe^{1/(x-1)}$
- (22) $y = \frac{e^x - 3}{2x + 7}$

$$(23) y = 4 \ln \frac{x}{x+2} + 1$$

4. Вычислить приближенно следующие величины, используя два ненулевых (помимо значения функции в точке) слагаемых в подходящем разложении Тейлора. Привести численную оценку погрешности вычисления, воспользовавшись подходящей формой остаточного члена. Сколько членов разложения потребуется для достижения точности 0,01?

- (1) $\sqrt[3]{124}$
- (2) $\operatorname{arctg} 0,2$
- (3) $\ln 1,5$
- (4) $\operatorname{sh} 0,2$
- (5) $\operatorname{ch} 0,1$
- (6) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{4}$
- (7) \sqrt{e}
- (8) $\ln 0,9$
- (9) $\arcsin \frac{1}{2}$
- (10) $\operatorname{arcsh} \frac{1}{2}$
- (11) $\operatorname{arcch} \frac{1}{2}$
- (12) $\sqrt{8}$
- (13) $1,2^{-3}$
- (14) $0,9^{-3}$
- (15) $\sqrt[3]{65}$
- (16) $\operatorname{arctg} 0,1$
- (17) $\ln \frac{8}{9}$
- (18) $\operatorname{sh} 1$
- (19) $\operatorname{ch} 1$
- (20) $\frac{1}{\sqrt{e}}$
- (21) $\sqrt[3]{9}$
- (22) $\sqrt{63}$
- (23) $1,1^{-4}$

5. Построить линию, заданную параметрически. Исследовать асимптотику на бесконечности и поведение в особых точках. Выделить участки кривой, на которых она может быть представлена графиком функции $y(x)$. На каждом из этих участков указать промежутки монотонности соответствующей функции.

- (1) $x = (t+1)^2 t, y = (t+2)(t-1)^2$.
- (2) $x = t^2 - 2t, y = t^2 - \ln(t^2)$.
- (3) $x = \frac{t^3}{t^2+1}, y = \frac{t^3-2t^2}{t^2+1}$
- (4) $x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t^3}{t-1}$
- (5) $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}, y = \frac{t}{t^4+1}$
- (6) $x = t^4 - t^2, y = 2t^3 - 3t^2$
- (7) $x = \frac{t^3+2}{t^2+1}, y = \frac{t^3}{t^2+1}$
- (8) $x = \frac{1}{1-t^2}, y = \frac{t^2}{t+1}$
- (9) $x = \frac{1}{1-t^2}, y = \frac{t^2+2}{t^2+1}$
- (10) $x = te^t, y = te^{-t}$
- (11) $x = t^2 + 2t, y = t^2 - \ln(t^2)$
- (12) $x = \frac{t^2}{t^2-1}, y = \frac{t^2}{t-1}$
- (13) $x = \frac{3+2t^2}{1+t^2}, y = \frac{t^3+t^2+1}{1+t^2}$
- (14) $x = 1 + t - t^2, y = t(1 - t^2) + t^2$
- (15) $x = 1 - 3t - t^2, y = t(1 - t^2) - 3t^2$
- (16) $x = 1 - t^2, y = t(1 - t^2)$
- (17) $x = \frac{t}{1-t^3}, y = \frac{t^2}{1-t^3}$

- (18) $x = 1 - \frac{4}{1+t^2}, y = t(1 - \frac{4}{1+t^2})$
 (19) $x = 2 \cos t + \cos 2t, y = \sin t - \sin 2t$
 (20) $x = 1 + \cos t, y = \frac{1}{1+\sin t}$
 (21) $x = \frac{\sin 3t}{\sin t}, y = \frac{\sin 3t}{\cos t}$
 (22) $x = 3 \cos t + \cos 3t, y = 3 \sin t - \sin 3t$
 (23) $x = \cos 2t + \sin 2t, y = \sin t$

6. Построить кривую, заданную уравнением. Исследовать асимптотику на бесконечности и поведение в особых точках. Выделить участки кривой, на которых она может быть представлена графиком функции $y(x)$. На каждом из этих участков указать промежутки монотонности соответствующей функции.

- (1) $x^4 + y^4 = x^2 - 2y^2$
 (2) $x^3 + y^3 = 2x^2 - y^2$
 (3) $x^3 + y^3 = x - y^2$
 (4) $y^4 - x^4 = y^2 - 2x^2$
 (5) $x^3 = x^2 - y^2 + 2xy$
 (6) $x^5 + y^5 = 5xy$
 (7) $y^5 + x^4 = xy^2$
 (8) $4y^2 = 4x^2y + x^5$
 (9) $x^4 + y^4 = 8xy^2$
 (10) $x^4 + y^4 = 4xy$
 (11) $x^4 - y^4 = 4xy$
 (12) $y^3 - x^2y + x^5 = 0$
 (13) $x^3y^3 = x - y$
 (14) $x^4 - y^4 = 4x^2y$
 (15) $x^y = y^x$
 (16) $(x^2 - y^2)^2 + 4xy = 0$
 (17) $x^3 + 2y^3 = 3x - 6y - 6y^2$
 (18) $(1 - x)(y^2 + y^4) = x^3$
 (19) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$
 (20) $x^3 + 3xy^2 = x^2 - y^2$
 (21) $x^3 - xy^2 - y^5 = 0$
 (22) $x^6 - y^6 = xy$
 (23) $x^6 - y^6 = x^2y^2$