

## Кривые второго порядка в аффинной плоскости

1. Эллипсом называется аффинный образ окружности (достаточно взять окружность с уравнением  $x^2 + y^2 = 1$ , т.е. окружность радиуса 1 с центром в начале координат).

а) Докажите, что в аффинных координатах  $x, y$  в  $E^2$  эллипс  $C$  задается уравнением второго порядка

$$(1) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

где коэффициенты  $a, b, c$  удовлетворяют условиям

$$(2) \quad ac > 0, \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} > 0.$$

б) Верно ли, что кривая с уравнением (1), удовлетворяющая условиям (2), есть эллипс?

в) Какие из кривых  $C_1 = \{x^2 - 3xy + 2y^2 + 7x - 5 = 0\}$ ,  $C_2 = \{2x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x - 4y + 1 = 0\}$ ,  $C_3 = \{3x^2 - 6xy + 4y^2 + 6x - 8y + 15 = 0\}$  являются эллипсами?

2. а) Является ли эллипс  $C$  центрально-симметричной фигурой? Если да, то найдите координаты его центра симметрии, если  $C$  задан уравнением (1).

б) Докажите, что все прямые, которые делят площадь эллипса пополам, проходят через одну точку. Как охарактеризовать эту точку?

3. Является ли эллипс  $C$  в евклидовой аффинной плоскости  $E^2$ , отличный от окружности, зеркально-симметричной фигурой? Если да, то найдите уравнения всех его осей симметрии в декартовых прямоугольных координатах  $x, y$  в  $E^2$ . Каков угол между двумя различными осями симметрии эллипса  $C$ ?

4. Гиперболой называется аффинный образ кривой с уравнением  $xy = 1$ .

а) Докажите, что в аффинных координатах  $x, y$  в  $\mathbb{A}^2$  гипербола  $C$  задается уравнением второго порядка (1), где коэффициенты  $a, b, c$  удовлетворяют условию

$$(3) \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} < 0.$$

б) Верно ли, что кривая с уравнением (1), удовлетворяющая условию (3), есть гипербола?

в) Какие из кривых  $C_1 = \{x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0\}$ ,  $C_2 = \{x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - y + 1 = 0\}$ ,  $C_3 = \{3x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 8y + 13 = 0\}$  являются гиперболами?

5. а) Является ли гипербола  $C$  центрально-симметричной фигурой? Если да, то найдите координаты ее центра симметрии, если  $C$  задана уравнением (1).

б) Является ли гипербола  $C$  в евклидовой аффинной плоскости  $E^2$  зеркально-симметричной фигурой? Если да, то найдите уравнения всех ее осей симметрии в декартовых прямоугольных координатах  $x, y$  в  $E^2$ . Каков угол между двумя различными осями симметрии гиперболы  $C$ ?

6. Параболой называется аффинный образ кривой с уравнением  $y = x^2$ .

а) Докажите, что в аффинных координатах  $x, y$  в  $E^2$  парабола  $C$  задается уравнением второго порядка (1), где коэффициенты  $a, b, c$  удовлетворяют условию

$$(4) \quad a^2 + c^2 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = 0.$$

б) Верно ли, что кривая с уравнением (1), удовлетворяющая условиям (3), есть парабола?

в) Какие из кривых  $C_1 = \{x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 2 = 0\}$ ,  $C_2 = \{x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 3y - 1 = 0\}$ ,  $C_3 = \{9x^2 - 6xy + y^2 - 5 = 0\}$  являются параболоми?

7. Является ли парабола  $C$  в евклидовой аффинной плоскости  $E^2$  зеркально-симметричной фигурой? Если да, то найдите уравнения всех ее осей симметрии в декартовых прямоугольных координатах  $x, y$  в  $E^2$ .