Листок 4

1. Рассмотрим кривую второго порядка C в E^2, задаваемую в аффинных координатах x, y уравнением
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$
Положим $\Delta_1 := a$, $\quad \Delta_2 := \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $\quad \Delta_3 := \det\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Докажите, что если $\Delta_1 \neq 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3/\Delta_1 < 0$, то C - эллипс.

2. В условиях и обозначениях задачи 1 докажите, что если $\Delta_1 \neq 0,\ \Delta_2 < 0,\ \Delta_3 \neq 0$, то C - гипербола.

3. В условиях и обозначениях задачи 1 докажите, что если $\Delta_2 = 0,\ \Delta_3 \neq 0$, то C - парабола.

4. а) В E^2 дан эллипс с уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ в декартовой прямоугольной системе координат, где $a \geq b \geq 0$. Точки $F_1 = (c, 0)$ и $F_2 = (-c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, называются фокусами эллипса. Докажите следующее оптическое свойство эллипса: пусть прямая l касается эллипса в точке P; тогда прямая l - это внешняя биссектриса угла $\widehat{F_1PF_2}$.

б) Сформулируйте и докажите оптическое свойство для гиперболы.

в) То же для параболы.

5. а) Воспользовавшись задачей 4.а), докажите следующее изогональное свойство эллипса: проведем из любой точки P, лежащей вне эллипса, две касательные к нему, и пусть X и Y - их точки касания; тогда углы $\widehat{F_1PX}$ и $\widehat{F_2PX}$ равны, где F_1 и F_2 - фокусы эллипса.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное изогональное свойство гиперболы.

6. а) Докажите, что середины отрезков, высекаемых на эллипсе C прямыми, параллельными фиксированной прямой a, лежат на прямой. Обозначив эту прямую через b и проведя аналогичное построение с прямыми, параллельными прямой b, получим прямую c. Как связаны прямые c и a?

б) Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для гиперболы.

в) Имеет ли место аналог утверждений а) и б) для параболы? Если нет, то в чем отличие?

7. *Подобием плоскости* E^2 *с коэффициентом* $k > 0$ назовем всякое преобразование $f : E^2 \xrightarrow{\sim} E^2$, при котором $|f(A)f(B)| = k|AB|$ для произвольных точек $A, B \in E^2$.

а) Докажите, что подобие является аффинным преобразованием плоскости E^2.

б) Подобие f называется *подобием первого* (соответственно *второго*) *рода*, если оно является аффинным преобразованием первого (соответственно второго) рода. *Гомотетия* f *с центром* O *и коэффициентом* $k > 0$ есть такое преобразование E^2, при котором $\overrightarrow{Of(A)} = k\overrightarrow{OA}$ для произвольной точки $A \in E^2$. Докажите, что гомотетия является подобием первого рода.

в) Опишите все подобия первого и второго рода соответственно через композиции гомотетий и движений.

8. Даны две окружности ω и ω_1, пересекающиеся в двух различных точках M и N.

а) Докажите, что существует подобие первого рода f с неподвижной точкой M такое, что $f(\omega) = \omega_1$.

б) Докажите, что для произвольной точки $X \in \omega$, отличной от N, точка $f(X) \in \omega_1$ лежит на прямой XN.

9. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим тетраэдр с вершинами в точках $A_i = (x_i, y_i, z_i),\ i = 1, 2, 3, 4$. Докажите, что его объем вычисляется по формуле $V = \frac{|\det A|}{6}$,где
$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Докажите, что всякая плоскость, проходящая через середины двух противоположных ребер тетраэдра, делит его на две равновеликие части.