

Листок 3

Задача 1. Пусть $\{g^t\}$ – фазовый поток в \mathbb{R}^n . Можно ли восстановить векторное поле, если нам известны отображения g^t лишь для целых t ?

Задача 2. Нарисуйте образ квадрата $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ при преобразовании фазового потока системы

$$(a) \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2y \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \quad \text{за время } t = 1.$$

Задача 3. Найдите объем образа единичного куба под действием преобразования за время $t = 1$ фазового потока системы

$$\dot{x}_1 = \sin x_2 + 3x_1, \quad \dot{x}_2 = \cos x_3 - 2x_2 + x_1, \quad \dot{x}_3 = \operatorname{arctg} x_1 - x_2 + x_3.$$

Задача 4. Выпрямите на плоскости следующие векторные поля:

$$(a) \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad (b) (x + y) \frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Задача 5. Пусть $b(t, x): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция. Докажите, что в расширенном фазовом пространстве для любой точки (t_0, x_0) существует достаточно малая окрестность, в которой обратная замена к замене координат $(t, x) \mapsto (t, X(t, x))$, где $X(t, x)$ – решение задачи Коши для уравнения $\dot{x} = b(t, x)$ с начальным условием $X(0, x) = x$, уравнение $\dot{x} = b(t, x)$ переводит в уравнение $\dot{y} = 0$. Таким образом, локально выпрямляется поле направлений. Выпрямите поле направлений уравнений (a) $\dot{x} = x$, (b) $\dot{x} = t$.

Задача 6. Пусть A и B – матрицы $n \times n$. Докажите, что e^{At} и e^{Bs} для всех t, s коммутируют тогда и только тогда, когда $[A, B] = AB - BA = 0$.

Задача 7. Докажите, что для всяких матриц A и B верно равенство (формула Ли)

$$e^{A+B} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{A/n} e^{B/n} \right)^n.$$