Листок 06. Срок сдачи 09 декабря 2016 года.

Для сдачи каждой из задач 6.1 — 6.5 необходимо чисто рассказать одному преподавателю столько пунктов этой задачи, сколько преподаватель сочтет нужным выслушать. Задачи со звездочкой сдаются и фиксируются в кондуите, но в баллах не оцениваются.

06.01. Параметрическое задание кривой. Параметрическая кривая в $\mathbb{R}^n$ это непрерывное отображение f некоторого промежутка $U \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$: $\quad f : U \to \mathbb{R}^n$.

а) Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ внутренняя точка U. Дайте определение дифференцируемости f в точке α и дифференциала функции f в этой точке. Докажите, что если $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ (где $f_i : U \to \mathbb{R}$), то дифференцируемость f в точке α равносильна дифференцируемости координатных функций f_i в точке α и что дифференциал функции f задается формулой $df(\alpha) = (f_1'(\alpha), \ldots, f_n'(\alpha)) \cdot dt$. Если интерпретировать $f(t)$ как положение движущейся по кривой точки в момент времени t, то вектор $\vec{v} = (f_1'(\alpha), \ldots, f_n'(\alpha))$ можно понимать как *вектор мгновенной скорости* точки в момент времени $t = \alpha$.

б) Параметрическая кривая f называется гладкой, если f всюду дифференцируема и дифференциал ненулевой. Напишите параметрические уравнения прямой l в $\mathbb{R}^n$, проходящей через точку $f(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ с направляющим вектором $\vec{v}$. Докажите, что расстояние от точки $f(t)$ до прямой l как функция от t есть $o(t-\alpha)$. Следовательно, прямая l является касательной прямой к параметрически заданной кривой $f_(t)$ в точке $f(\alpha)$.

в) Покажите, что касательная прямая l не меняется при изменении параметризации кривой, т.е. при замене отображения $f : U \to \mathbb{R}^n$ отображением $g = f \circ \varphi$, где φ есть некоторая дифференцируемая функция $\varphi : V \to \mathbb{R}$ с ненулевой производной, определенная в окрестности V некоторой точки β так что $\varphi(\beta) = \alpha$ и $\varphi(V) \subset U$.

06.02 Дифференциал функции двух переменных Пусть D — некоторая окрестность точки $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, и задана функция $f : D \to \mathbb{R}$.

а) Дайте определение дифференцируемости f в точке (a, b) и дифференциала функции f в этой точке. Докажите, что дифференциал функции двух переменных $f(x, y)$ задаётся формулой $df = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)dy$. (Дайте определение частных производных!)

б) Пусть частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ существуют и непрерывны в окрестности точки (a, b). Докажите, что функция f дифференцируема в точке (a, b).

в) Приведите пример такой функции f, что ее частные производные существуют в некоторой окрестности точки (a, b), но при этом f не дифференцируема в этой точке.

06.03 а) Пусть U — окрестность точки $a \in \mathbb{R}^n$, V — окрестность точки $b \in \mathbb{R}^m$, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $g : V \to \mathbb{R}^k$, $f(U) \subset V$, $f(a) = b$, f дифференцируемо в точке a, g дифференцируемо в точке $b = f(a)$. Покажите, что дифференциал композиции $g \circ f$ в точке a есть композиция дифференциалов: $d(g \circ f)(a) = dg(b) \circ df(a)$.

б) Пусть в условиях предыдущего пункта $n = 1$, $m = 2$, $k = 1$, т.е. имеются функции $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ и $g(x_1, x_2)$. Выведите для этого случая формулу для дифференцирования сложной функции:

$$(g(f_1(t), f_2(t)))' = \frac{\partial g}{\partial x_1}(f_1(t), f_2(t)) \cdot f_1'(t) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(f_1(t), f_2(t)) \cdot f_2'(t).$$

в) Пользуясь формулой предыдущего пункта, найдите производную функции x^x, представив ее как композицию функций $f(x) = (x, x)$ и $g(u, v) = u^v$.

г) Пусть $\varphi(t)$ - ограничение функции $g(x, y)$ на прямую $x = a + \xi t, y = b + \eta t$. Выразите $\varphi'(0)$ через частные производные функции g. Если вектор (ξ, η) имеет единичную длину, то $\varphi'(0)$ называется производной функции g в точке (a, b) по направлению вектора (ξ, η).

06.04 Инверсией F относительно окружности радиуса R с центром в точке O называется отображение евклидовой плоскости (без точки O) в себя, переводящее каждую точку M ($M \neq O$) в такую точку M', лежащую на луче OM, что $|OM| \cdot |OM'| = R^2$. Положим $R = 1$, а в качестве O возьмем начало координат в $\mathbb{R}^2$.

а) Выпишите явные формулы для вычисления координат точки $F(M)$, где M точка с координатами (x, y).

б) Вычислите дифференциал отображения F в точке (a, b) и опишите его геометрическое действие.

06.05 Неявно заданная функция.

а) Пусть $f(a, b) = 0$. Предположим, что в D содержится такой прямоугольник $P = [p, q] \times [r, s] = \{(x, y) \quad p \le x \le q;\ r \le y \le s\}$, что $a \in (p, q)$, $b \in (r, s)$ и при любом фиксированном $x_0 \in [p, q]$ функция $f(x_0, y)$ является строго монотонной функцией от y на отрезке $[s, t]$. Докажите, что существует такой содержащий точку a интервал $(u, v) \subset (p, q)$ и функция $g : (u, v) \to \mathbb{R}$, что при $u < x < v$, $r < y < s$ уравнения $f(x, y) = 0$ и $y = g(x)$ равносильны.

б) Докажите, что функция g из предыдущего пункта непрерывна в точке a.

г) Пусть $f(a, b) = 0$. Предположим, что функция f имеет непрерывные частные производные в D, и $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Докажите, что существует такой содержащий точку (a, b) прямоугольник

$$Q = (u, v) \times (r, s) = \{(x, y) \quad u < x < v;\ r < y < s\}, \qquad Q \subset D,$$

и функция $g : (u, v) \to \mathbb{R}$, что при $u < x < v$, $r < y < s$ уравнения $f(x, y) = 0$ и $y = g(x)$ равносильны. Докажите, что при этом функция g дифференцируема в точке a и

$$g'(a) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}.$$

06.06.* Пусть в условиях 06.03а) $n = 1$, $m = k$, и функции f и g всюду дифференцируемы, дифференциал f всюду ненулевой (т.е. $f(t)$ — гладкая параметрическая кривая), а дифференциал g всюду невырожден, т.е. $\det(dg) \neq 0$. Тогда $b = f(a)$ означает, что кривая $f(t)$ при $t = a$ проходит через точку $b \in \mathbb{R}^m$. Покажите, что композиция $g(f(t))$ также является гладкой кривой, причем направляющий вектор касательной к кривой $g(f(t))$ в точке $g(b)$ есть образ направляющего вектора касательной к кривой $f(t)$ в точке b при отображении $dg(b)$.

06.07.* Докажите, что инверсия сохраняет углы между кривыми. (См 06.04 и 06.06.)

06.08.* Пусть в условиях пункта 06.03а) $n = k = 1$, $m = 3$ и $f(t)$ является гладкой параметрической кривой в $\mathbb{R}^3$. Предположим, что эта кривая лежит на поверхности, заданной уравнением $g(x, y, z) = 0$. Докажите, что вектор $(\frac{\partial g}{\partial x}(b), \frac{\partial g}{\partial y}(b), \frac{\partial g}{\partial z}(b))$ перпендикулярен касательной к кривой $f(t)$ в точке b. Этот вектор называется нормалью к поверхности.