

**Задачи по программе обязательных дисциплин, по которым может быть
написана курсовая 1 года балакавриата**

Задачи по алгебре

- A1 Знаменитая последовательность чисел Фибонначи $\{F_n\}$ задается *линейным рекуррентным уравнением*: $F_0 := 0$, $F_1 := 1$ и $F_{n+2} := F_{n+1} + F_n$.
- а) Вычислите производящую функцию $F(t) := \sum_{n \geq 0} F_n t^n$;
- б) Докажите, что производящая функция $a(t) := \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ последовательности целых чисел $\{a_n\}$, заданной линейным рекуррентным уравнением $a_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} c_j a_{n+j}$ при любых начальных условиях является отношением двух многочленов с целыми коэффициентами;
- в) Пусть $\{a_n^i\}_{i=1}^l$, набор из l последовательностей целых чисел, удовлетворяющих совместному линейному рекуррентному соотношению длины k : $a_{n+k}^s = \sum_{0 \leq j \leq k-1} c_{ij}^s a_{n+j}^i$, $c_{ij}^s \in \mathbb{Z}$. Докажите, что при любых заданных начальных условиях $\{a_1^1 = m_1^1, \dots, a_k^l = m_k^l\}$ производящая функция $a_i(t) := \sum_{n \geq 0} a_n^i t^n$ i -ой последовательности будет отношением двух многочленов с целыми коэффициентами;
- г)* Пусть Γ – конечный граф. Докажите, что производящая функция последовательности путей длины n в графе Γ с началом в вершине v является рациональной функцией.
- A2 а) Для простого $p > 2$ вычислите порядок вычета числа $(p+1)$ в группе обратимых элементов $(\mathbb{Z}/(p^n \mathbb{Z}))^*$ и докажите, что эта группа циклическая;
- б) Опишите группу $(\mathbb{Z}/(2^n \mathbb{Z}))^*$;
- в) Опишите в общем случае группу обратимых элементов $(\mathbb{Z}/(n \mathbb{Z}))^*$.
- A3 а) Какие значения может принимать размерность пересечения пары подпространств размерностей k и l в пространстве размерности n ? Верно ли, что пара подпространств размерностей k и l в данном n -мерном пространстве с точностью до изоморфизма однозначно определяется размерностью их пересечения?
- б) Покажите, что тройка подпространств в данном n -мерном пространстве с точностью до изоморфизма не определяется однозначно размерностями своих элементов и размерностями их попарных пересечений?
- в) Приведите конечный набор натуральных чисел, которыми тройка подпространств однозначно определяется.
- A4 Опишите с точностью до изоморфизма множество пар полных флагов в n -мерном пространстве
- A5 Пусть $\mathbb{F}$ – поле характеристики $p > 0$. Докажите, что многочлен $f(x) := x^p - x - a$ либо неприводим над $\mathbb{F}$, либо разлагается в произведение линейных множителей.
- A6 Докажите, что а) количество элементов в конечном поле может быть только степенью простого числа;
- б) конечная подгруппа в мультипликативной группе поля циклическая;
- в) все поля из p^n элементов изоморфны;
- г) поле из p элементов вкладывается в поле из q элементов если и только если $q = p^k$.
- A7 (*Формула Бине-Коши*) Пусть A – матрица размера $m \times n$ и B – матрица размера $n \times m$ (для $m > n$). Докажите, что $\det(AB) = 0$ и $\det(BA) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} A_{i_1 \dots i_n} B_{i_1 \dots i_n}$, где $A_{i_1 \dots i_n}$ (соответственно $B_{i_1 \dots i_n}$) – миноры порядка n , составленные из строк (столбцов) с номерами $i_1, \dots, i_n$.

- A8 а) Пусть $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ и $g(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0$ многочлены, чьи корни равны $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \dots, \beta_m$ соответственно. Докажите, что число $Res(f, g) := \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j)$, называемое результатом многочленов $f(x)$ и $g(x)$, может быть вычислено

при помощи детерминанта матрицы порядка $n + m$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ 1 & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_m & \dots & \dots & \dots & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 \end{pmatrix},$$

называемой матрицей Сильвестра;

- б) Выведите отсюда, что условие, что многочлен $f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$ имеет кратный корень может быть задано многочленом от коэффициентов a_i .
- A9 Докажите, что детерминант кососимметричной матрицы порядка n равен нулю, если n – нечетно и является квадратом многочлена от матричных коэффициентов, если n – четное число. Выпишите этот многочлен, называемый пфаффианом?
- A10 (*Теорема Амицура-Левитского*) Докажите, что для произвольных матриц $A_1, \dots, A_{2n}$ порядка n выполнено тождество

$$\sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma A_{\sigma_1} \dots A_{\sigma_{2n}} = 0$$

Задачи по геометрии:

- Г1 Характеризация вещественных коник посредством инвариантов. Листок 4, задачи 1-3.
- Г2 Геометрические свойства коник в евклидовой плоскости. Листок 4, задачи 4-6.
- Г3 Подобия плоскости. Листок 4, задачи 7-8.
- Г4 Объем сечений тетраэдра. Листок 4, задача 10.
- Г5 Структура векторного пространства над F_2 на множестве подмножеств конечного множества. Листок 3, задача 1.
- Г6 Специальные системы линейных уравнений над полями $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2$. Листок 3, задача 4.
- Г7 Двойственные векторные пространства. Листок 3, задачи 2 и 8.
- Г8 Евклидова геометрия в многомерном пространстве. Листок 3, задача 9.
- Г9 Решетки в n -мерном евклидовом пространстве. Листок 3, задача 10.
- Г10 Образ и ядро линейного отображения. Листок 3, задача 3.
- Г11 Теорема Хвельмслева-Морли. Листок 2, задачи 8-10.
- Г12 Доказать, что для того, чтобы данный пятиугольник можно было аффинным преобразованием перевести в правильный, необходимо и достаточно, чтобы четыре диагонали этого пятиугольника были параллельны сторонам, не имеющим с этими диагоналями общих вершин

- Г13 Дан треугольник ABC и точка M на плоскости. Существует ли аффинное преобразование, переводящее треугольник ABC в другой треугольник $A'B'C'$ и точку M в точку пересечения его высот? В случае отрицательного ответа на вопрос укажите условия, при которых это возможно.
- Г14 Доказать, что каково бы ни было аффинное преобразование φ пространства, через любую его точку можно провести три попарно ортогональные прямые k, l, m , что прямые $\varphi(k), \varphi(l), \varphi(m)$ также будут ортогональны.
- Г15 Доказать, что центры всех эллипсов, касающихся данных четырех прямых, лежат на одной прямой.
- Г16 Пусть C - непустая невырожденная коника. Докажите, что любая инволюция f на C высекается пучком прямых, т.е., существует такая точка $O \notin C$, что для любой точки $X \in C$ имеем $\{X, f(X)\} = OX \cap C$.
- Г17 Доказать, что три медианы гиперболического треугольника пересекаются в одной точке
- Г18 Доказать, что каждый угол гиперболического треугольника со сторонами 3, 4, 6 меньше соответствующего угла евклидова треугольника с теми же длинами сторон

Задачи по логике:

- Л1 Докажите, что пространство $\mathbb{R}^3$ можно разбить на непересекающиеся окружности радиуса 1.
- Л2 Докажите, что в модели $(\mathbb{N}; =, +, \times, 0, 1)$ определимо множество $A_q = \{q^n : n > 0\}$ для любого натурального числа q .
- Л3 Сформулируем принцип множественного выбора: для любого семейства непустых множеств S существует функция $f: S \rightarrow \mathcal{P}(\bigcup S)$, сопоставляющая каждому элементу S его непустое конечное подмножество. Выведите аксиому выбора из принципа множественного выбора.
- Л4 Докажите, что предикат $x = \gamma$ определим в модели $(\mathbb{R}; =, +, \times, 0, 1)$ тогда и только тогда, когда γ — алгебраическое число.

Задачи по анализу:

- Ан1 (01.07) Какое наибольшее число множеств можно получить из одного многократным применением операций замыкания и дополнения. (Ответ 14, доказательство можно найти где-то среди задач в книжке Келли "Общая топология").
- Ан2 (01.09) Пример упорядоченного поля, не удовлетворяющего аксиоме Архимеда.
- Ан3 (03.07) Гармонический ряд растет как логарифм.
- Ан4 (05.06) Ряд для $\pi/4$.
- Ан5 Существование непрерывной и нигде не дифференцируемой функции.
- Ан6 Построение кривых Пеано, замещающих области на плоскости и в пространстве.

Ан7 Пример полного метрического пространства, в котором имеется система вложенных в друг друга замкнутых шаров с пустым пересечением.

Ан8 Построения поля действительных чисел по Коши и по Дедекинду.