Семинар 12

Аффинная геометрия

1. Напишите систему линейных неравенств, определяющих внутренность треугольника с вершинами $(2,1)$, $(2,-5)$, $(-4,-1)$.

2. Докажите, что если O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC, то $O = \frac{a}{a+b+c}A + \frac{b}{a+b+c}B + \frac{c}{a+b+c}A$.

3. Докажите, что середины диагоналей выпуклого четырехугольника и середина отрезка, соединяющего точки пересечения его противоположных сторон, лежат на одной прямой.

4. *Простым отношением* тройки различных коллинеарных точек A, B, C в аффинном пространстве $\mathbb{A}$ (над $\mathbf{k}$) называется скаляр $(ABC) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$. Докажите, что простое отношение не меняется при аффинных преобразованиях пространства $\mathbb{A}$.

Проективная геометрия

5. Рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}^1 = P(V)$, где V – двумерное векторное пространство над полем $\mathbf{k}$. Для произвольного ненулевого вектора $x \in V$ через $< x >$ будем обозначать соответствующую точку в $\mathbb{P}^1$, то есть одномерное подпространство в V, натянутое на вектор x. Напомним, что если e_0, e_1 – базис в V, то его класс пропорциональности называется *проективной системой координат* в $\mathbb{P}^1$, а для произвольной точки $A =< x >\in \mathbb{P}^1$ ее *проективными координатами* $(x_0 : x_1)$ (в указанной системе координат) называется класс пропорциональности пары скаляров (x_0, x_1) таких, что $x = x_0e_0 + x_1e_1$.

Покажите, что для трех различных точек $E_0, E_1, E \in \mathbb{P}^1$ существует единственная проективная система координат $(x_0 : x_1)$ в $\mathbb{P}^1$, в которой $E_0 = (1 : 0)$, $E_1 = (0 : 1)$, $E = (1 : 1)$.

6. Покажите, что дополнение $U_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{< e_1 >\}$ к точке $< e_1 >$ в $\mathbb{P}^1$ можно отождествить с аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ (над $\mathbf{k}$) посредством биекции

$$f : \ U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1, \quad (x_0 : x_1) \mapsto x_1/x_0.$$

(В этом случае точка $< e_1 >$ называется *бесконечно удаленной точкой аффинной прямой* $\mathbb{A}^1$, и используется обозначение $< e_1 >= \infty$. При этом U_0 называется *аффинной картой* в $\mathbb{P}^1$.)

Указание. Для доказательства биективности f найдите обратное к f отображение.

7. *Двойным отношением четверки различных точек* $A, B, C, D \in \mathbb{P}^1$, где $A =< x >$, $B =< y >$, $C =< z >$, $D =< w >$, назовем число (точнее, элемент поля $\mathbf{k}$)

$$(ABCD) = (ABCD)_{xyzw} := \frac{\beta}{\alpha}\Big/\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta \cdot \alpha'}{\alpha \cdot \beta'},$$

где $\alpha, \beta, \alpha', \beta' y$ определены равенствами $z = \alpha x + \beta y$, $w = \alpha' x + \beta' y$.

а) Проверьте корректность этого определения, т.е. покажите, что если $< x >=< x' >$, $< y >=< y' >$, $< z >=< z' >$, $< w >=< w' >$, то $(ABCD)_{xyzw} = (ABCD)_{x'y'z'w'}$.

б) Покажите, что если E_0, E_1, X, E – четверка различных точек в $\mathbb{P}^1$, то имеет место следующее геометрическое истолкование двойного отношения: двойное отношение (E_0E_1XE) есть координата точки X в аффинной карте $U_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{E_1\}$, в которой $E_0 = 0$, $E = 1$, $E_1 = \infty$.

в) Выразите через двойное отношение (E_0E_1XE) проективные координаты точки X в проективной системе координат, определяемой точками E_0, E_1, E, т.е. в системе координат, в которой $E_0 = (1 : 0)$, $E_1 = (0 : 1)$, $E = (1 : 1)$.

г) Пусть даны четыре различные точки A, B, C, D в $\mathbb{A}^1$ с аффинными координатами a, b, c, d соответственно. Выразите через эти координаты двойное отношение $(ABCD)$.

д) Найдите двойное отношение четверки точек 1, 2, 3, 4 в $\mathbb{R}$.