Листок 5

1. Доказать, что площади параллелограммов, построенных на любой паре сопряженных полудиаметров эллипса, равны.

2. В аффинную кривую второго порядка вписан параллелограмм. Доказать, что центр кривой и центр параллелограмма совпадают.

3. Найти прямую, четвертую гармоническую к двум сторонам AB и AC треугольника и биссектрисе, выходящей из вершины A.

4. Составить уравнение кривой второго порядка, проходящей через 5 точек с однородными координатами $A(0:0:1)$, $B(0:1:1)$, $C(1:0:1)$, $D(1:5:1)$, $E(5:1:1)$.

5. Коника C в аффинной карте (x, y) задана уравнением $xy = 1$. Написать её уравнение в аффинных картах (x, z) и (y, z). Найти точки кривой C, лежащие на бесконечности.

6. На аффинной карте (x, y) задана прямая L: $x = 2t + 1$, $y = 3t - 2$. Найти $\lim\limits_{t\to\infty}(x(t), y(t))$ в $\mathbb{P}^2$.

7. Пусть l_1 и l_2 – две прямые в $\mathbb{P}^2$. Рассмотрим точку $A \notin l_1 \cup l_2$. Рассмотрим центральную проекцию π_A: $l_1 \to l_2$ из точки A прямой l_1 на прямую l_2. Доказать, что существует такое проективное преобразование φ: $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, что ограничение φ на прямую l_1 совпадает с π_A. Можно ли утверждать единственность такого преобразования φ?

8. На окружности с диаметром AC выбрана произвольная точка B, отличная от A и C. Пусть M и N – середины хорд AB, BC, а P и Q – середины меньших дуг, стягиваемых этими хордами. Прямые AQ и BC пересекаются в точке K, а прямые CP и AB – в точке L. Доказать, что MQ, NP и KL пересекаются в одной точке.

9. Докажите, что существует единственная нетождественная инволюция σ: $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ (т.е. проективное преобразование второго порядка), которое оставляет на месте точку $A(1, 1, 1)$ и каждую точку прямой l: $2X + Y + Z = 0$. Найти $\sigma(1, 2, 3)$.

10. Четырехугольник $ABCD$ вписан в невырожденную проективную кривую второго порядка. Прямые AC, BD и прямую, проходящую через точки пересечения $AB \cap CD$ и $AD \cap BC$, назовем диагоналями полного четырехугольника $ABCD$. Доказать, что любая его диагональ есть поляра точки пересечения двух других диагоналей.