6.1. Компактны ли операторы правого и левого сдвига в ℓ^p и c_0?

6.2. Может ли образ компактного оператора между банаховыми пространствами содержать бесконечномерное замкнутое подпространство?

6.3. Докажите компактность оператора вложения $C^1[a,b] \to C[a,b]$.

6.4. Пусть $f \in C[a,b]$, и пусть M_f — оператор умножения на f в $C[a,b]$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для компактности M_f.

6.5. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток, $f\colon I \to \mathbb{C}$ — существенно ограниченная измеримая функция, и пусть M_f — оператор умножения на f в $L^p(I)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для для компактности M_f.

6.6. Для интегрируемой функции f на $[0,1]$ определим функцию Tf формулой

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Является ли T компактным оператором **(a)** из $C[0,1]$ в $C[0,1]$? **(b)** из $L^p[0,1]$ в $C[0,1]$ (где $1 < p \leqslant \infty$)? **(c)** из $L^p[0,1]$ в $L^p[0,1]$ (где $1 < p \leqslant \infty$)? **(d)** из $L^1[0,1]$ в $C[0,1]$? **(e)** из $L^1[0,1]$ в $L^1[0,1]$?

6.7. Пусть $I = [a,b]$, и пусть $K \in C(I \times I)$. Докажите компактность *интегрального оператора* $T\colon C(I) \to C(I)$,

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy.$$

6.8. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, и пусть $K \in L^2(X\times X, \mu\times\mu)$. Докажите компактность *интегрального оператора Гильберта–Шмидта* $T\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$,

$$(Tf)(x) = \int_X K(x,y)f(y)\,d\mu(y).$$

Указание: докажите, что линейная оболочка множества функций вида $K(x,y) = f(x)g(y)$, где $f,g \in L^2(X,\mu)$, плотна в $L^2(X \times X, \mu \times \mu)$, и воспользуйтесь тем, что $\|T\| \leqslant \|K\|_2$ (см. задачу 2.9).

6.9 (C^*-*тождество*)**.** Докажите, что для любого ограниченного линейного оператора T в гильбертовом пространстве справедливо равенство $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

6.10. Вычислите норму оператора $T\colon L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ из задачи 6.6. (*Указание:* оператор T^*T компактен и самосопряжен.)

6.11 (*теорема Шмидта*)**.** Пусть T — компактный линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Докажите, что существуют не более чем счетные ортонормированные системы (e_n) и (f_n) в H и набор положительных чисел (s_n), такие, что $Te_n = s_n f_n$, $Tx = 0$ при $x \perp \{e_n\}$ и $s_{n+1} \leqslant s_n$ для всех n. При этом числа (s_n) определены указанными условиями однозначно (они называются *s-числами* оператора T), и $s_n \to 0$ при $n \to \infty$, если эта последовательность бесконечна. (*Указание:* см. указание к предыдущей задаче.)

6.12. Докажите, что s-числа интегрального оператора Гильберта–Шмидта в $L^2(X,\mu)$ удовлетворяют условию $\sum_n s_n^2 < \infty$.

6.13-B. Пусть X — метризуемый компакт, μ — регулярная борелевская мера на X и $K \in C(X \times X)$. Докажите, что образ интегрального оператора Гильберта–Шмидта $T_K\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ содержится в $C(X)$, и что T_K является компактным оператором из $L^2(X,\mu)$ в $C(X)$.

6.14-B. Пусть X — банахово пространство и $1 \leqslant p < \infty$. Докажите, что всякий компактный оператор $T\colon X \to \ell^p$ аппроксимируется по операторной норме операторами конечного ранга.

6.15-B. Пусть — гильбертово пространство.
(a) Для $x, f \in H$ определим оператор $x \otimes f \in \mathscr{B}(H)$ формулой $(x \otimes f)(y) = \langle y, f \rangle x$. Представьте операторы $T(x \otimes f)$, $(x \otimes f)T$ (где $T \in \mathscr{B}(H)$) и $(x_1 \otimes f_1)(x_2 \otimes f_2)$ в виде $y \otimes g$ для некоторых $y, g \in H$.
(b) Пусть $0 \neq I \subseteq \mathscr{B}(H)$ — двусторонний идеал. Докажите, что $I \supseteq \mathscr{F}(H)$, где $\mathscr{F}(H)$ — идеал операторов конечного ранга. Как следствие, всякий ненулевой замкнутый двусторонний идеал в $\mathscr{B}(H)$ содержит идеал компактных операторов $\mathscr{K}(H)$. (*Замечание:* если H сепарабельно и бесконечномерно, то $\mathscr{K}(H)$ — единственный замкнутый двусторонний идеал в $\mathscr{B}(H)$, отличный от 0 и $\mathscr{B}(H)$. Мы сможем это доказать в следующем семестре.)