Контрольная по топологии 24 ноября 2016 г.

Вариант 1. В скобках после номера задачи указано количество очков за ее правильное решение

1. (2) Рассмотрим последовательность групп и их гомоморфизмов

$$0 \to C_1 = \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\times 3} C_0 = \mathbb{Z}_6 \to 0,$$

где средний гомоморфизм — умножение на 3. Докажите, что эта последовательность является цепным комплексом групп, и найдите ее гомологии.

2. (3) Нарисуйте на ориентируемой поверхности рода 2 нестягиваемый цикл, гомологичный нулю. Докажите, что он действительно гомологичен нулю.

3. (2) Вычислите гомологии графа $K_{3,2}$ — полного двудольного графа с долями из 3 и 2 вершин — с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$.

4. (4) Постройте симплициальное разбиение замкнутого (т.е. содержащего границу) листа Мебиуса. Вычислите с помощью этого разбиения гомологии листа Мебиуса с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$. Воспользовавшись результатами вычисления, докажите, что лист Мебиуса не стягивается на свою границу.

5. (4) Рассмотрим в группе $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (свободном произведении двух групп целых чисел с образующими, соответственно, a, b) подгруппу G, порожденную словами a^3, b^3, ab, ba. Постройте накрытие букета двух окружностей $S^1 \vee S^1$ с базисной точкой — вершиной букета, при котором образом фундаментальной группы накрывающего пространства является подгруппа G.

6. (6) Докажите, что у всякого связного неориентируемого псевдомногообразия имеется двулистное связное ориентируемое накрытие.

7. (4) Продолжим отображение $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданное формулой $p : x \to x^3 - x$ до отображения $\tilde{p} : S^1 = \mathbb{R} \sqcup \{\infty\} \to S^1 = \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$, положив $\tilde{p}(\infty) = \infty$. Докажите, что продолженное отображение $\tilde{p}$ непрерывно. Найдите степень отображения $\tilde{p}$.

Вариант 2. В скобках после номера задачи указано количество очков за ее правильное решение

1. (2) Рассмотрим последовательность групп и их гомоморфизмов

$$0 \to C_1 = \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\times 2} C_0 = \mathbb{Z}_6 \to 0,$$

где средний гомоморфизм — умножение на 2. Докажите, что эта последовательность является цепным комплексом групп, и найдите ее гомологии.

2. (3) Нарисуйте на проективной плоскости нестягиваемый цикл. Докажите, что он действительно нестягиваем.

3. (2) Вычислите гомологии графа K_4 — полного графа на 4 вершинах — с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$.

4. (4) Вычислите гомологии бутылки Клейна с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$.

5. (4) Рассмотрим в группе $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ (свободном произведении двух групп целых чисел с образующими, соответственно, a, b) подгруппу G, порожденную словами $a^3, b^3, ab^{-1}, b^{-1}a$. Постройте накрытие букета двух окружностей $S^1 \vee S^1$ с базисной точкой — вершиной букета, при котором образом фундаментальной группы накрывающего пространства является подгруппа G.

6. (6) Докажите, что у всякого связного неориентируемого псевдомногообразия имеется двулистное связное ориентируемое накрытие.

7. (4) Продолжим отображение $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, заданное формулой $p : x \to x^3 - x$ до отображения $\tilde{p} : \mathbb{C}P^1 = S^2 = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\} \to \mathbb{C}P^1 = S^2 = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$, положив $\tilde{p}(\infty) = \infty$. Докажите, что продолженное отображение $\tilde{p}$ непрерывно. Найдите степень отображения $\tilde{p}$.