Семинар 13

Проективная геометрия

1. На проективной прямой $\mathbb{P}^1$ дана четверка различных точек $A,\ B,\ C, D$. Докажите, что двойное отношение $(ABCD)$ равно простому отношению $(ABC) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$ тройки точек $A,\ B,\ C$ в аффинной карте $\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{D\}$.

2. а) Найдите уравнение прямой в $\mathbb{P}^2$, проходящей через точки $(1 : 1 : -1)$ и $(-3 : 2 : 1)$.

б) Найдите точку пересечения прямых AB и CD, где $A = (1 : 1 : 2),\ B = (2 : -1 : 1),\ C = (-2 : -2 : 3),\ D = (4 : 0 : -1)$. Нужно ли для этого находить уравнения прямых AB и CD?

в) Докажите, что точки $A = (1 : 1 : 2)$, $B = (3 : -1 : 2)$, $C = (11 : -1 : 10)$, $D = (3 : 7 : 10)$ в $\mathbb{P}^2$ лежат на одной проективной прямой, и найдите их двойное отношение.

3. Пусть T – параллельный перенос в аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$, заданный уравнениями $T:\ x' = x+b_1,\ y' = y+b_2$, а S – аффинный сдвиг в $\mathbb{A}^2$ параллельно оси Ox, заданный уравнениями $S:\ x' = x + y,\ y' = y$. Отождествим $\mathbb{A}^2$ с картой U_0 в $\mathbb{P}^2$ и продолжим аффинный сдвиг S до проективного преобразования f проективной плоскости $\mathbb{P}^2$. Существует ли такая аффинная карта U в $\mathbb{P}^2$, что, отождествив ее с $\mathbb{A}^2$ и продолжив параллельный перенос T в U до проективного преобразования плоскости $\mathbb{P}^2$, мы получим то же самое преобразование f ?

4. Пусть $\mathbf{k}$ – поле характеристики $\mathrm{char}\mathbf{k} \neq 2$, $A = (a_{ij}) \in M(3, \mathbf{k})$ – ненулевая симметрическая матрица, и $\mathbb{P}^2$ – проективная плоскость над полем $\mathbf{k}$ с координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$. *Коникой в* $\mathbb{P}^2$ называется множество $C = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j = 0\}$. Коника C в $\mathbb{P}^2$ называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$. Матрицу A будем называть *матрицей, задающей конику* C. *Проективной касательной прямой к конике* C *в точке* $x \in C$ называется такая проективная прямая l в $\mathbb{P}^2$, проходящая через точку x, что либо $l \subset C$, либо $l \cap C = \{x\}$.

а) Докажите, что коника $C \neq \emptyset$ невырождена тогда и только тогда, когда в каждой ее точке имеется единственная проективная касательная к C.

б) Для невырожденной коники C найдите уравнение проективной касательной к ней в произвольной точке $x_0 \in C$.

в) Произвольная коника $C \subset \mathbb{P}^2$ не совпадает с $\mathbb{P}^2$ (то есть является собственным подмножеством в $\mathbb{P}^2$. При этом найдутся три точки $y_1, y_2, y_3 \notin C$, не лежащие на одной проективной прямой, то есть такие, что их проективная оболочка совпадает с $\mathbb{P}^2$.