Теория чисел. Листок IV .

Задачи из этого листка принимаются до 26 декабря 2016 года.

1. (а) Пусть $f(x)$ - многочлен с целыми коэффициентами. Допустим, что для всех простых p кроме, может быть, конечного числа, $f(x)$ разлагается на линейные множители в $\mathbb{F}_p[x]$. Докажите, что $f(x)$ разлагается на линейные множители в $\mathbb{Q}[x]$.
(б) Пусть $f(x)$ - многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что существует бесконечно много простых p таких, что $f(x)$ разлагается на линейные множители в $\mathbb{F}_p[x]$.
Замечание: утверждения из пункта (а) и (б) легко следуют из теоремы Чеботарева (сфомулированной в предыдущем листке), однако при решении этих задач пользоваться ей нельзя. Вместо теоремы Чеботарева используйте факт доказанный на лекции 13 декабря: для любого конечного расширения $\mathbb{Q} \subset K$ предел $(s-1)\zeta_K(s)$ при $s \to 1$ существует и отличен от 0.)
(в) Пусть $f(x)$ - многочлен с целыми коэффициентами такой, что для всех простых p кроме, может быть, конечного числа $f(x)$ имеет корень по модулю p. Используя теорему Чеботарева, докажите, что $f(x)$ приводим в $\mathbb{Q}[x]$.
(д) Докажите, что многочлен $f(x) = (x^2-3)(x^2-5)(x^2-15)$ имеет корень по модулю любого простого p. (Заметим, что $f(x)$ не имеет рациональных корней.)

2. (а) Пусть $1 \neq \epsilon \in \mathbb{C}^*$ - корень n-ой степени из 1. Вычислите сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n}.$$

(б) Пусть $f : G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ - функция, $\hat{f} : \hat{G} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ - ее преобразование Фурье. Допустим, что $\sum_{m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} f(m) = 0$. Докажите, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n}$$

сходится и вычислите его сумму.
(в) Вычислите сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{4n} - \frac{1}{4n+1}).$$

3. Пусть p - простое число вида $4k+3$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$, и $\chi : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ - символ Лежандра: $\chi(m) = (m/p)$.
(а) Докажите, что

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) L(s, \chi).$$

(б) Докажите, что если, вдобавок, $p \neq 3$, то

$$L(1, \chi) = -\frac{\pi}{p\sqrt{p}} \sum_{m=1}^{p-1} \chi(m) m.$$

При решении этой задачи можно пользоваться без доказательства следующим фактом: пусть $\epsilon = cos\frac{2\pi}{p} + isin\frac{2\pi}{p}$ и

$$G = \sum_{m=1}^{p-1} \chi(m)\epsilon^m$$

- сумма Гаусса. Гаусс доказал, что $G = i\sqrt{p}$, где $\sqrt{p}$ - положительный корень. (С точностью до знака мы вычислили G на 2-ой лекции.)

(в) Пусть h_K - число классов идеалов O_K, V - число квадратичных вычетов по модулю p, содержащихся в промежутке $(0, p/2)$, N - число невычетов из того же промежутка. Докажите, что если $p \equiv 7\,(mod\,8)$, то

$$h_K = V - N,$$

а если $p \equiv 3\,(mod\,8)$ и $p \neq 3$, то

$$h_K = \frac{1}{3}(V - N).$$