

Задачи 6.

1. а) Найдите матрицу формы Шаповалова на уровне 2 в модуле Верма $V_{\Delta, c}$ над алгеброй Вирасоро.

б) Покажите, что скалярное произведение вектора $(L_{-1}^2 + b^2 L_{-2})|\Delta\rangle$ с любым другим вектором на уровне 2 делится на $\Delta - \Delta_{1,2}$ в первой степени.

Из этого следует, что при $\Delta = \Delta_{1,2}$ этот вектор лежит в ядре формы Шаповалова и является сингулярным вектором.

в) На какую степень $\Delta - \Delta_{1,2}$ делится норма вектора $(L_{-1}^2 + b^2 L_{-2})|\Delta\rangle$? Дайте ответ в зависимости от центрального заряда. Объясните полученный ответ.

2. Найдите вычет четырехточечного конформного блока $\mathcal{F}(\vec{\Delta}, \Delta, c; z)$ при специальной промежуточной конформной размерности $\Delta = \Delta_{1,2}$.

Указание: найдите вклад состояния $(L_{-1}^2 + b^2 L_{-2})|\Delta\rangle$.

3. Найдите предел четырехточечного конформного блока при $c \rightarrow \infty$ (и фиксированных конформных размерностях Δ_i, Δ).

Указание: лидирующий вклад должны давать состояния вида $L_{-1}^k|\Delta\rangle$.

4. Напомним (см. задачу контрольной), что алгебру Вирасоро с произвольным центральным зарядом можно реализовать по формуле $T_\lambda(z) = -\frac{1}{2}\partial\varphi^2 + \lambda\partial^2\varphi$, где поле $\varphi(z)$ нормировано по формуле $\varphi(z)\varphi(w) \sim \log(z-w)$ (см. задачу 7 контрольной).

а) Найдите операторное произведение $T(z)$ и $V_\alpha(z) =: \exp(i\alpha\varphi(z))$; найдите конформную размерность $V_\alpha(z)$.

б) Проверьте, что при условии сохранения импульса (при $\alpha = 2\lambda - \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$) конформный блок $\mathcal{F}(\vec{\Delta}, \Delta, c; z)$ совпадает с $(1-z)^{\alpha_2\alpha_3}$.

Сравните с четырехточкой $\langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(z)V_{\alpha_3}(1)V_{\alpha_4}(\infty) \rangle$.

5. Рассмотрите трехточку в присутствии вырожденного поля $\Phi_{1,2}: \langle \Phi_{1,2}(z_1)\Phi_2(z_2)\Phi_3(z_3) \rangle$, напишите уравнение следующее из зануления особого вектора. Что за условие на Δ_1, Δ_2 получилось?

6. Напишите уравнение на 4 точечный конформный блок от вырожденного поля $\Phi_{1,2}: \mathcal{F}_{12}(z) = \langle \Phi_{1,2}(z)\Phi_{\Delta_1}(0)\Phi_{\Delta_2}(1)\Phi_{\Delta_3}(\infty) \rangle$. Решите его в терминах гипергеометрической функции ${}_2F_1$.

7. Пусть $\mathcal{F}_{tor,1}(\Delta_P, \Delta_\alpha; z)$ 1 точечный конформный блок на торе. По определению это след вертексного оператора $q^{L_0}\Phi_{\Delta_\alpha}$ на пространстве V_Δ . Найдите первый нетривиальный член $\mathcal{F}_{tor,1}(\Delta_P, \Delta_\alpha; z)$.

8. Рассмотрим пространство плотностей вида $\langle z^{\lambda+n}dz^\mu \rangle$, при фиксированных $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{Z}$. Задайте на нем действие алгебры Ли векторных полей на окружности, т.е. операторов $z^{k+1}\partial/\partial z$. Сравните с действием генераторов Вирасоро на модах поля $\Phi(z)$ (см задачу 6 из задания 5).