## Листок 07*. Срок сдачи 21 декабря 2016

*Этот листок весь состоит из задач со звездочкой. По существу он представляет собой довольно подробный план нескольких последних лекций и тем самым может быть полезен при подготовке этого материала к экзамену. Задачи со звездочкой сдаются и фиксируются в кондуите, но в баллах не оцениваются.*

**07.01.*** а) Докажите, что непрерывная функция на отрезке равномерно непрерывна на нем.

б) Обозначим множество всех ограниченных функций на отрезке $[a, b]$ через $\mathcal{F}([a, b])$. Определим расстояние между двумя функциями $f$ и $g$ из $\mathcal{F}([a, b])$ как $\rho(f, g) = \sup_{\alpha\in[a,b]} |f(\alpha) - g(\alpha)|$. Докажите, что выполнены все три аксиомы метрического пространства.

в) Докажите, что множество $C([a, b])$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ является замкнутым подмножеством в $\mathcal{F}([a, b])$.

г Докажите, что любая непрерывная на $[a, b]$ функция есть равномерный предел ступенчатых функций.

д) Покажите, что множество ступенчатых функций всюду плотно в множестве всех кусочно-непрерывных функций на отрезке. (Функция на отрезке называется кусочно-непрерывной, если она имеет конечное число точек разрыва, причем все они первого рода, т.е. в этих точках у функции существуют односторонние пределы.)

е) Пусть $\alpha$ фиксированная точка отрезка $[a, b]$. Рассмотрим отображение $\varphi_\alpha : \mathcal{F}([a, b]) \to \mathbb{R}$, сопоставляющее каждой функции $f \in \mathcal{F}([a, b])$ ее значение в точке $\alpha$, т.е. $\varphi_\alpha(f) = f(\alpha)$. Докажите, что отображение $\varphi_\alpha$ непрерывно.

ж) Докажите, что если последовательность функций $f_n \in \mathcal{F}([a, b])$ равномерно сходится к некоторой функции $f$, то для любой точки $\alpha \in [a, b]$ числовая последовательность $f_n(\alpha)$ имеет пределом число $f(\alpha)$.

з) Приведите пример такой последовательности непрерывных функций $f_n \in [a, b]$, которая не является равномерно сходящейся, но для любого $\alpha \in [a, b]$ числовая последовательность $f_n(\alpha)$ имеет предел.

и) Приведите пример такой последовательности непрерывных функций $f_n \in [a, b]$, и разрывной функции $f$ на отрезке $[a, b]$, что для любого $\alpha \in [a, b]$ числовая последовательность $f_n(\alpha)$ имеет пределом $f(\alpha)$.

**07.02.*** Предположим, что для каждого отрезка $[c, d] \subset [a, b]$ зафиксировано некоторое множество функций $\mathcal{G}([c, d])$ содержащее константы и являющееся линейным подпространством в $\mathcal{F}([c, d])$, удовлетворяющее условию следующему условию:

(*) если отрезок $[c', d'] \subset [c, d]$, то ограничение любой функции из $\mathcal{G}([c, d])$ на отрезок $[c', d']$ содержится в $\mathcal{G}([c', d'])$.

Предположим, что на каждом $\mathcal{G}([c, d])$ определен функционал $S_{[c,d]} : \mathcal{G}([c, d]) \to \mathbb{R}$, обладающий следующими четырьмя свойствами:

1) Отображение $S_{[c,d]}$ линейно, т.е. $S_{[c,d]}(f + g) = S_{[c,d]}(f) + S_{[c,d]}(g)$ и $S_{[c,d]}(\lambda f) = \lambda S_{[c,d]}(f)$.

2) $S_{[c,d]}$ аддитивен, т.е. если $p \in (c, d)$, $f \in \mathcal{G}([c, d])$, то $S_{[c,d]}(f) = S_{[c,p]}(f) + S_{[p,d]}(f)$.

3) $S_{[c,d]}$ монотонен, т.е. если $f \le g$ на $[c, d]$, то $S_{[c,d]}(f) \le S_{[c,d]}(g)$.

4) $S_{[c,d]}(1) = d - c.$ .

Заметим, что в силу линейности условие 3) равносильно условию

3') если $f \ge 0$ на $[c, d]$, то $S_{[c,d]}(f) \ge 0$

В этой задаче обсуждаются общие свойства такого функционала.

а) Докажите, что если последовательность функций $f_n \in \mathcal{G}([a,b])$ равномерно сходится к функции $f \in \mathcal{G}([a,b])$, то предел числовой последовательности $S_{[a,b]}(f_n)$ равен числу $S_{[a,b]}(f)$. Докажите, что функционал $S_{[a,b]}$ непрерывен на $\mathcal{G}([a,b])$.

б) Предположим, что $\mathcal{G}([a,b])$ не замкнуто в пространстве всех ограниченных функций $\mathcal{F}([a,b])$. Покажите, что замыкание $\overline{\mathcal{G}([a,b])}$ также является линейным подпространством в $\mathcal{F}([a,b])$ и удовлетворяет условию (*). Пусть функция $f \in \overline{\mathcal{G}([a,b])}$, но $f \notin \mathcal{G}([a,b])$. Рассмотрим некоторую последовательность функций $f_n \in \mathcal{G}([a,b])$ равномерно сходящуюся к функции $f$. Докажите, что предел числовой последовательности $S_{[a,b]}(f_n)$ существует и не зависит от выбора последовательность функций $f_n \in \mathcal{G}([a,b])$, равномерно сходящейся к $f$.

в) В условиях предыдущего пункта докажите, что функционал $S_{[a,b]}$ можно единственным образом продолжить с $\mathcal{G}([a,b])$ на $\overline{\mathcal{G}([a,b])}$ таким образом, чтобы выполнялись условия 1)-4).

**07.03.* Вокруг теоремы Ньютона-Лейбница.** Пусть имеется некоторое пространство ограниченных функций $\mathcal{G}([a,b])$, удовлетворяющее условию (*), на котором построен функционал $S_{[a,b]}$, удовлетворяющий условиям 1)-4) предыдущей задачи.

а) Пусть $f \in \mathcal{G}([a,b])$. Определим функцию на отрезке $[a,b]$ формулой $F(t) = S_{[a,t]}(f)$. Докажите, что $F(t)$ непрерывна на $[a,b]$.

б) Пусть $f$ непрерывна в точке $\alpha \in (a,b)$. Докажите, что $F(t)$ дифференцируема в точке $\alpha$ и $F'(\alpha) = f(\alpha)$.

в) Пусть $\mathcal{G}([c,d])$ представляет собой множество ограниченных функций на отрезке $[c,d]$, обладающих первообразной. Докажите, что функционал $S_{[c,d]}(f) = F(d) - F(c)$ удовлетворяет условиям 1)-4). ($F$ — какая-нибудь первообразная функции $f$.)

**07.04.* Конструкция функционала.**

а) Покажите, что множество ступенчатых функций $\mathcal{J}([a,b])$ удовлетворяет условию (*). Покажите, что в этом случае удовлетворяющий условиям 1)-4) функционал $S_{[c,d]}$ существует и единственен.

б) Покажите, что $C([a,b]) \subset \overline{\mathcal{J}([a,b])}$, и выведите из этого, что на $C([a,b])$ удовлетворяющий условиям 1)-4) функционал существует и единственен.

в) Докажите, что каждая непрерывная на отрезке функция обладает первообразной.

г) Докажите, что $\overline{\mathcal{J}([a,b])}$ есть пространство всех ограниченных функций, имеющих точки разрыва только 1 рода.