Семинар 14

Коники на проективной плоскости

1. Пусть $\mathbf{k}$ – поле характеристики $\mathrm{char}\mathbf{k} \neq 2$, $A = (a_{ij}) \in M(3, \mathbf{k})$ – ненулевая симметрическая матрица, и $\mathbb{P}^2$ – проективная плоскость над полем $\mathbf{k}$ с координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$. *Коникой в* $\mathbb{P}^2$ называется множество $C = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid \Phi(x) = 0\}$, где $\Phi(x) := \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_i x_j = 0$. Матрицу A будем называть *матрицей, задающей конику* C. Коника C в $\mathbb{P}^2$ называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$, т. е. $\mathrm{rank}A = 3$. *Проективной касательной прямой к конике* C *в точке* $X \in C$ называется такая проективная прямая l в $\mathbb{P}^2$, проходящая через точку X, что либо $l \subset C$, либо $l \cap C = \{X\}$.

а) Докажите, что если коника $C \neq \emptyset$ невырождена, то в каждой точке $X \in C$ имеется единственная проективная касательная прямая к C, и она имеет с C единственную общую точку X.

б) Для невырожденной коники C и произвольной точки $Y = (y_0 : y_1 : y_2) \in C$ обозначим через $T_Y C$ проективную касательную прямую к C в точке Y. Покажите, что $T_Y C$ задается линейным (по x) уравнением $\Phi(x, Y) = 0$, где $\Phi(x, Y) := \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_i y_j$, а (a_{ij}) - матрица, задающая конику C.

2. В обозначениях задачи 1 докажите, что:

а) если $\mathrm{rank}A \leq 2$, где A - матрица, задающая конику C, то существует точка $Y \in C$ такая, что имеется не единственная касательная проективная прямая к C в точке Y;

б) если $\mathrm{rank}A = 2$, то вышеуказанная точка Y единственна, и найдите ее координаты; если при этом коника C имеет еще хотя бы одну точку Z, отличную от Y, то она распадается в объединение двух различных прямых, пересекающихся в точке Y, и одна из этих прямых проходит через Z;

в) если $\mathrm{rank}A = 1$, то вышеуказанная точка Y есть любая точка коники C; при этом C есть проективная прямая l с уравнением, скажем, $L(x) = 0$, и квадратичная форма $\Phi(x)$ есть (с точностью до ненулевого множителя) квадрат линейной формы $L(x)$. (В этом случае конику C называют *сдвоенной прямой* l.)

3. Пусть C - невырожденная коника в $\mathbb{P}^2$, и $Y \in \mathbb{P}^2$ - произвольная точка. Проективную прямую p_Y с уравнением $\Phi(x, Y) = 0$ (см. определение $\Phi(x, Y)$ в задаче 1.б) назовем *полярой точки* Y относительно коники C.

а) Пусть $Y \notin C$. Покажите, что $Y \notin p_Y$ и для произвольной прямой l, проходящей через точку Y и пересекающей поляру p_Y в точке Z, а конику C в паре различных различных точек A и B, четверка точек $ABXY$ - гармоническая.

б) Пусть $Y \notin C$. Покажите, что если поляра p_Y пересекает конику C в паре различных точек P и Q, то прямые PY и QY - касательные к конике C в точках P и Q соответственно, т. е. $PY = T_P C$ и $QY = T_Y C$.

в) Покажите, что если $Z \in p_Y$, то и $Y \in p_Z$.