Математический анализ. 1 курс. 1 семестр. Введение в интеграл.

1 Равномерная сходимость. Метрика равномерной сходимости.

Сначала несколько общих понятий. Рассмотрим множество всех ограниченных функций, определенных на множестве $D \subset \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(D) = \{f : D \to \mathbb{R}, f \text{ограничена}\}. \tag{1.1}$$

Очевидно, $\mathcal{F}(D)$ имеет естественную структуру векторного пространства над $\mathbb{R}$ (функции можно складывать и умножать на числа), и даже коммутативного кольца (но это нам почти не понадобится). Кроме того, на $\mathcal{F}(D)$ можно следующим образом ввести структуру метрического пространства: для $f, g \in \mathcal{F}(D)$ определим расстояние между ними как

$$\rho(f, g) = \sup_{\alpha \in D} |f(\alpha) - g(\alpha)|. \tag{1.2}$$

Задача. Докажите, что введенное таким образом расстояние удовлетворяет всем аксиомам расстояния.

Введенная метрика на $\mathcal{F}(D)$ называется *метрикой равномерной сходимости*, или, допуская некоторую вольность речи, равномерной метрикой.

Коль скоро мы ввели расстояние на $\mathcal{F}(D)$, мы можем говорить о шарах, следовательно, об окрестностях, следовательно, об открытых и замкнутых множествах, и, следовательно, о пределах последовательностей. Если последовательность функций $f_n \in \mathcal{F}(D)$ имеет относительно нашей метрики в $\mathcal{F}(D)$ предел $f \in \mathcal{F}(D)$, то говорят, что последовательность функций f_n *равномерно сходится* к функции f.

При наличии метрики можно также говорить о пределах вещественнозначных функций, определенных на $\mathcal{F}(D)$ или его подмножествах, а также о непрерывности таких функций. Для того, чтобы избежать многократного повторения одного и того же слова "функция" по отношению к разнородным объектам, такую вещественнозначную функцию $\varphi : \mathcal{F}(D) \to \mathbb{R}$ ($\varphi : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}(D)$) называют *функционалом.*

Множество $\mathcal{F}(D)$ на самом деле не очень интересно для изучения, поскольку оно содержит слишком много слишком плохих функций, нас будут интересовать несколько важных его подмножеств, состоящих из более хороших в том или ином смысле функций.

Первое очень важное подмножество в $\mathcal{F}(D)$ это все непрерывные и ограниченные на D функции. (Заметим, что условие ограниченности выполняется автоматически, если D является отрезком, или, более общо, компактным множеством.) Это подмножество стандартно обозначается

$$C(D) = \{f : D \to \mathbb{R}, \quad f \text{ непрерывна и ограничена}\}. \tag{1.3}$$

Очевидно, $C(D) \subset \mathcal{F}(D)$ является векторным подпространством, поскольку сложение непрерывных функций и умножение их на константы опять дает непрерывные функции.

Другое интересное для нас подмножество в $\mathcal{F}(D)$ это множество *ступенчатых* функций. Мы дадим определение ступенчатой функции только для случая $D = [a, b]$; функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется *ступенчатой*, если на отрезке существуют такие точки $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$, что $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = b$, и на каждом интервале (α_{i-1}, α_i), $i = 1, \ldots, n$ функция f постоянна. Обозначим множество ступенчатых функций на $[a, b]$ через $\mathcal{J}([a, b])$; очевидно, $\mathcal{J}([a, b]) \subset \mathcal{F}([a, b])$ является векторным подпространством в $\mathcal{F}([a, b])$.

Очевидно, $C([a, b]) \cap \mathcal{J}([a, b])$ состоит только из констант; наименьшее разумное подпространство в $\mathcal{F}([a, b])$, содержащее их обоих, это пространство *кусочно-непрерывных* функций, которое мы обозначим $PC([a, b])$. Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется *кусочно-непрерывной*, если она непрерывна всюду, кроме, быть может, конечного множества точек, в которых функция может иметь разрывы только первого рода.

Как устроены наши множества относительно введенной нами метрики? Как мы уже видели, недавно доказанная равномерная непрерывность любой непрерывной функции на отрезке означает, что любая непрерывная функция может быть с любой точностью приближена ступенчатой. Это означает, что множество ступенчатых функций не только не замкнуто, но и содержит в своем замыкании все непрерывные, а, значит, и кусочно-непрерывные функции: $\overline{\mathcal{J}([a,b])} \supset PC([a,b])$. Этот несложный результат весьма важен, поэтому зафиксируем его в виде отдельной теоремы.

Теорема 1.1. *Множество ступенчатых функций содержит в своем замыкании все кусочно-непрерывные функции:* $\overline{\mathcal{J}([a,b])} \supset PC([a,b])$.

Задача. Докажите, что $PC([a,b])$ не замкнуто.

Задача. Докажите, что $\overline{\mathcal{J}([a,b])} \neq PC([a,b])$.

Замечательно, однако, что множество непрерывных функций $C([a,b])$ является относительно введенной нами метрики замкнутым множеством.

Для доказательства рассмотрим какую-нибудь предельную точку множества $C(D)$; по определению это такая функция f из $\mathcal{F}(D)$ в любой окрестности которой (т.е. в любом шаре с центром в f) содержится непрерывная функция. Возьмем любую точку $a \in D$, являющуюся предельной точкой D; мы хотим доказать, что функция f непрерывна в точке a. Согласно стандартному определению непрерывности, для этого нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, так что $\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \cap D$ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и в шаре радиусом $\varepsilon/3$ с центром в f выберем непрерывную функцию φ. По определению расстояния (1.2) это означает, что $|f(t) - \varphi(t)| < \varepsilon/3$ при всех $t \in D$. Далее, пользуясь непрерывностью функции φ выбираем такое δ, что $\varphi(x) - \varphi(a)| < \varepsilon/3$ при всех $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap D$. Теперь для таких x мы можем оценить $|f(x) - f(a)| = |f(x) - \varphi(x) + \varphi(x) - \varphi(a) + \varphi(a) - f(a)| \leq |f(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(a)| + |\varphi(a) - f(a)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$.

Теорема 1.2. *Равномерный предел последовательности непрерывных функций также является непрерывной функцией.*

Приведем теперь простейшие примеры функций, определенных на пространстве $\mathcal{F}(D)$, которые мы договорились называть *функционалами*. Самый простой пример получается так: зафиксируем какую-нибудь точку $a \in D$. Рассмотрим функционал $v_a : \mathcal{F}(D) \to \mathbb{R}$, сопоставляющий каждой функции $f \in \mathcal{F}(D)$ значение этой функции в точке a: $v_a(f) = f(a)$. Очевидно, этот функционал непрерывен в любой точке $f \in \mathcal{F}(D)$. Действительно, зафиксируем $\varepsilon > 0$. Нам нужно указать такое $\delta > 0$, что для любой функции φ, расстояние $\rho(f, \varphi)$ от которой до f меньше δ,

$|v_a(f) - v_a(\varphi)| < \varepsilon$, т.е. $|f(a) - \varphi(a)| < \varepsilon$. Но вспоминая определение метрики $\rho(f, \varphi) = \sup_{x \in D} |f(x) - \varphi(x)|$, мы видим, что нам достаточно просто положить $\delta = \varepsilon$: тогда если $\sup_{x \in D} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$, то уж тем более $|f(a) - \varphi(a)| < \varepsilon$.

Отметим, что доказанная непрерывность функционала v_a дает еще одно доказательство того, что если последовательность функций f_n равномерно сходится к некоторой функции f, то и последовательность значений этих функций в точке a (т.е. $v_a(f_n) = f_n(a)$) имеет пределом число $v_a(f) = f(a)$ — это простая переформулировка определения непрерывности по Гейне функционала v_a.

Еще одно важное замечание по поводу этого примера состоит в том, что функционал v_a является, очевидно, линейным (значение в точке a суммы двух функций равно сумме их значений в этой точке, а при умножении функции на число все ее значения умножаются на это число). Конечномерная интуиция подсказывает нам, что все линейные функции заведомо должны быть непрерывными, поэтому доказательство непрерывности, возможно, можно было бы как-нибудь просто вывести из его линейности. Однако, оказывается, конечномерная интуиция здесь нас подводит, и на самом деле линейность функционала, вообще говоря, никак не связана с его непрерывностью. Для того, чтобы привести соответствующий пример, введем еще одно стандартное и очень часто востребованное пространство функций на отрезке: $C^1([a, b]) \subset C([a, b])$ состоит из функций, дифференцируемых на $[a, b]$ и имеющих на $[a, b]$ непрерывную производную. Поскольку $C^1([a, b]) \subset C([a, b])$, на нем также определено введенное нами расстояние; зафиксируем точку $\alpha \in [a, b]$ и рассмотрим на $C^1([a, b])$ функционал $u_\alpha(f) = f'(\alpha)$. Он, очевидно, линеен, но не ограничен, например, ни в какой окрестности нулевой функции: для любых двух положительных чисел M и ε (M большое, а ε маленькое) каждый легко придумает такую непрерывно дифференцируемую функцию f на отрезке, что $\max_{x \in [a,b]} |f(x)| < \varepsilon$, но при этом $f'(\alpha) > M$. Следовательно, этот функционал не может быть непрерывным на $C^1([a, b])$.

2 Функционал площади.

Еще со школы известно, что интеграл — это площадь. Точнее, определенный интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ — это площадь "криволинейной трапеции", т.е. фигуры, ограниченной осью абсцисс, вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$. Конечно, здесь предполагается, что рассматриваемая функция положительна на отрезке $[a, b]$. Главная проблема этого определения состоит в определении площади фигуры — эта задача, пожалуй, даже сложнее той, которую мы пытаемся решить, если, конечно, не ограничиваться, как это делается в большей части школьного курса, только многоугольниками. Напомним, что в школьном курсе кроме многоугольников площадь определяется только для круга и его пересечения с многоугольниками (т.е. сегмент и сектор), причем для площади круга приходится давать отдельное определение. В этом, пожалуй, состоит одна из основных трудностей определения площади: нам необходимо сначала описать класс фигур, для которых мы сможем определить площадь. Следующий шаг определения понятен: сопоставление фигуре A ее площади $S(A)$ это отображение из множества плоских фигур (которое мы должны были очертить на предыдущем шаге) в $\mathbb{R}$, обладающее следующими общепринятыми свойствами.

(1) *Аддитивность.* Если фигура A есть объединение двух непересекающихся фигур A_1 и A_2, т.е. $A = A_1 \cup A_2$ и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то $S(A) = S(A_1) + S(A_2)$.

(2) *Положительность.* Для любой фигуры $S(A) \geq 0$.

(3) *Нормировка.* Площадь единичного квадрата равна единице.

Заметим, что в силу аддитивности условие положительности равносильно более общему и очень важному условию монотонности:

(2') *Монотонность.* Если Фигура A' содержится в фигуре A, т.е. $A' \subset A$, то $S(A') \leq S(A)$.

Итак, построение теории площади для плоских фигур включает в себя следующие шаги:

- Указать класс фигур, для которых мы будем определять понятие площади.
- Указать, как определяется по фигуре A число $S(A)$.
- Доказать, что определенное в предыдущем пункте $S(A)$ удовлетворяет свойствам аддитивности, положительности (или монотонности) и нормировки.

В школьном курсе эта программа реализована только для многоугольников; как уже говорилось, любое расширение класса фигур, для которых определяется площадь, требует значительных усилий.

При обсуждении свойств, которым должна удовлетворять площадь "криволинейной трапеции", мы за отправную точку также возьмем перечисленные основные свойства площади. Сначала нам необходимо понять, что именно мы должны потребовать в определении.

Как и в случае определения площади, описание того класса функций, для которых мы будем определять интеграл, является весьма нетривиальной и важной частью общей задачи. Более того, для разных классов функций определение можно давать исходя из разных соображений, и, соответственно, трудности, с которыми придется столкнуться при доказательстве основных свойств, тоже различны. Поэтому мы вначале не будем конкретизировать этот класс функций, а только заметим, что выполнение свойств аддитивности и линейности накладывает на этот класс функций определенные естественные требования. Во-первых, исходя из линейности естественно потребовать, чтобы сложение функций и умножение их на произвольные константы не выводило нас за пределы рассматриваемого класса функций, т.е. чтобы рассматриваемое множество функций являлось линейным пространством. Во-вторых, для аддитивности естественно потребовать, что если лежащую в нашем классе функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[a, b]$, ограничить на меньший отрезок $[c, d] \subset [a, b]$, то полученная на отрезке $[c, d]$ функция также будет принадлежать к рассматриваемому нами классу функций.

Таким образом, мы приходим к следующей постановке задачи. Для каждого отрезка $[a, b]$ мы фиксируем некоторое линейное подпространство $\mathcal{G}([a, b]) \subset \mathcal{F}([a, b])$, при этом должно выполняться следующее свойство:

(*) Для любого отрезка $[c, d] \subset [a, b]$ и любой функции $f(x) \in \mathcal{G}([a, b])$ ограничение этой функции на отрезок $[c, d]$ лежит в $\mathcal{G}([c, d])$.

На каждом $\mathcal{G}([a, b])$ мы хотим определить функционал

$$S_{[a,b]} : \mathcal{G}([a, b]) \to \mathbb{R},$$

обладающий следующими свойствами.

(1) *Линейность.* Если $f, g \in \mathcal{G}([a,b])$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то $S_{[a,b]}(f+g) = S_{[a,b]}(f) + S_{[a,b]}(g)$ и $S_{[a,b]}(\lambda f) = \lambda S_{[a,b]}(f)$.

(2) *Аддитивность.* Если $f \in \mathcal{G}([a,b])$, $c \in [a,b]$, то ограничения функции f на каждый из отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ также лежат, соответственно, в $\mathcal{G}([a,c])$ и $\mathcal{G}([c,b])$, причем $S_{[a,b]}(f) = S_{[a,c]}(f) + S_{[a,c]}(f)$.

(3) *Положительность.* Если функция f неотрицательна на отрезке $[a,b]$, то $S_{[a,b]}(f) \geq 0$

(4) *Нормировка.* $S_{[a,b]}(1) = b - a$.

Пользуясь линейностью, легко показать, что условие положительности равносильно следующему очень важному условию монотонности:

(3') *Монотонность.* Если $f \geq g$ на $[a,b]$, то $S_{[a,b]}(f) \geq S_{[a,b]}(g)$.

Из монотонности нетрудно вывести очень часто используемую "теорему об оценке интеграла":

(3") Если $|f(x)| \leq M$ на $[a,b]$, то $|S_{[a,b]}(f)| \leq M|b-a|$.

Для доказательства достаточно применить свойство монотонности к двойному неравенству $-M \leq f(x) \leq M$, понимая левую и правую части как постоянные функции на $[a,b]$, и учитывая, что $S_{[a,b]}(M) = MS_{[a,b]}(1) = M(b-a)$. (Пользуемся сначала линейностью (1), а затем нормировкой (4).)

Итак, если мы хотим построить "теорию определенного интеграла" нам необходимо сделать следующее.

- Для каждого отрезка $[a,b]$ указать удовлетворяющее условию (*) подпространство $\mathcal{G}([a,b])$, в котором мы собираемся определять интеграл.
- На каждом $\mathcal{G}([a,b])$ определить функционал $S_{[a,b]}$.
- Проверить, что построенный функционал удовлетворяет условиям (1)-(3).

Оказывается, трудности при реализации второго и третьего шага существенно зависят от того, какое основное пространство $\mathcal{G}([a,b])$ мы выберем для работы: чем с более широким классом функций мы хотим работать, тем труднее построение функционала и доказательство его основных свойств. Мы разберем построение для нескольких разных способов выбора $\mathcal{G}([a,b])$, оставив естественный вопрос о "самом большом" подходящем классе функций за рамками этих лекций.

Проще всего взять в качестве $\mathcal{G}([a,b])$ самое простое и обозримое из встречавшихся нам подпространств в $\mathcal{F}([a,b])$ — пространство ступенчатых функций $\mathcal{J}([a,b])$. Если ступенчатая функция положительна, то соответствующая "криволинейная трапеция" представляет собой объединение прямоугольников, так что ее площадь определена однозначно. Нетрудно написать и явную формулу: если ступенчатая функция на отрезке $[a,b]$ определяется разбиением $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-1} < \alpha_n$, $\alpha_0 = a$, $\alpha_n = b$, так что при $x \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i)$ $f(x) = p_i$, $i = 1, \ldots, n$, то определим

$$S_{[a,b]}(f) = \sum_{i=1}^{n} p_i(\alpha_i - \alpha_{i-1}). \tag{2.1}$$

Нетрудно проверить, что определенный таким образом функционал удовлетворяет всем условиям (1)-(4). Проще всего начать с аддитивности: если точка c является одной из точек деления, $c = \alpha_k$, то аддитивность получается автоматически разбиением суммы (2.1) на две: $S_{[a,b]}(f) = \sum_{i=1}^{n} p_i(\alpha_i - \alpha_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k} p_i(\alpha_i - \alpha_{i-1}) + \sum_{i=k}^{n} p_i(\alpha_i - \alpha_{i-1}) = S_{[a,c]}(f) + S_{[c,b]}(f)$. Если же c не является одной из точек деления, т.е. $c \in (\alpha_{k-1}, \alpha_k)$, то все получается ровно так же, но нам придется разбить k-ое слагаемое в сумме (2.1) на два: $p_k(\alpha_k - \alpha_{k-1}) = p_k(\alpha_k - c) + p_k(c - \alpha_{k-1})$, из которых первое пойдет в сумму для $S_{[a,c]}(f)$ а второе для $S_{[c,b]}(f)$. Теперь, когда аддитивность доказана, линейность можно проверять на каждом участке постоянства функции отдельно, где это уже совершенно очевидно. Остальные два свойства (положительность и нормировка) также очевидны. Тем самым мы доказали очень важное утверждение.

Теорема 2.1. *Существует единственный функционал $S_{[a,b]}$ на пространстве ступенчатых функций $\mathcal{J}([a,b])$, удовлетворяющий свойствам (1)-(4), а именно функционал, заданный формулой (2.1).*

Прежде чем распространять определение функционала $S_{[a,b]}$ на более широкие пространства функций, отметим одно очень важное наблюдение: независимо от того, на каком подпространстве $\mathcal{G}([a,b]) \subset \mathcal{F}([a,b])$ задан функционал $S_{[a,b]}$, условия (1)-(4) гарантируют его непрерывность. Действительно, запишем стандартное определение непрерывности функционала $S_{[a,b]}$ в "точке" (т.е. в функции) $f \in \mathcal{G}([a,b])$: $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0$, так что $\forall \varphi \in \mathcal{G}([a,b])$ такой что $\rho(f,\varphi) < \delta$ выполняется неравенство $|S_{[a,b]}(f) - S_{[a,b]}(\varphi)| < \varepsilon$. Расшифруем последние два неравенства: $\rho(f,\varphi) < \delta$ означает, что $\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| < \delta$, то есть на отрезке $[a,b]$

$$-\delta < f(x) - \varphi(x) < \delta, \tag{2.2}$$

а второе неравенство переписывается как $|S_{[a,b]}(f(x) - \varphi(x))| < \varepsilon$. Из сравнения полученных неравенств сразу видно, как по данному ε указать требуемое δ: достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{b-a}$. Действительно, применяя к неравенствам (2.2) свойство монотонности (3') (слева и справа стоят постоянные функции $-\delta$ и δ), получаем $-\delta(b-a) < S_{[a,b]}(f-\varphi) < \delta(b-a)$, что и дает требуемое неравенство.

Теорема 2.2. *Если на $\mathcal{G}([a,b])$ существует функционал $S_{[a,b]}$, удовлетворяющий условиям (1)-(4), то он непрерывен.*

Этот результат оказывается особенно удобен для применения, если условие непрерывности переформулировать по Гейне.

Следствие 2.1. *Если последовательность функций $f_n \in \mathcal{G}([a,b])$ равномерно сходится к функции $f \in \mathcal{G}([a,b])$, то последовательность $S_{[a,b]}(f_n)$ имеет предел, равный $S_{[a,b]}(f)$.*

Этот результат позволяет сразу заметно расширить пространство $\mathcal{G}([a,b])$, на котором удается определить функционал $S_{[a,b]}$, удовлетворяющий условиям (1)-(4). Идея очень простая: если пространство $\mathcal{G}([a,b])$ не замкнуто, то можно попробовать продолжить "по непрерывности" этот функционал на замыкание $\overline{\mathcal{G}([a,b])}$. Теорема 2.2 гарантирует, что если такое продолжение существует, то оно единственно, но существование такого продолжения, конечно, требует доказательства. Нетрудно, например, придумать непрерывную функцию на каком-нибудь подмножестве $A \subset \mathbb{R}$ которая не продолжается непрерывно на замыкание $\bar{A}$. (Например, функция $1/x$ непрерывна на $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, но не может быть продолжена до непрерывной функции на $\mathbb{R}$.) Однако в данном случае благодаря линейности нашего функционала существование и единственность продолжения доказать совсем не трудно. Действительно, пусть мы уже построили функционал $S_{[a,b]}$ на некотором пространстве $\mathcal{G}([a,b]) \subset \mathcal{F}([a,b])$, и пусть $f \in \mathcal{F}([a,b])$ является предельной точкой для $\mathcal{G}([a,b])$, но не лежит в нем. Тогда существует последовательность функций $\varphi_n \in \mathcal{G}([a,b])$, равномерно сходящаяся к f. Сходящаяся последовательность является последовательностью Коши, т.е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N$, что $\forall m,n \geq N\ \rho(\varphi_m,\varphi_n) < \varepsilon$. Последнее неравенство означает, что при всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon$, то есть $-\varepsilon < \varphi_n(x) - \varphi_m(x) < \varepsilon$. В силу монотонности функционала $S_{[a,b]}$ это означает, что $-\varepsilon(b-a) < S_{[a,b]}(\varphi_n) - S_{[a,b]}(\varphi_m) < \varepsilon(b-a)$, что означает, что числовая последовательность $S_{[a,b]}(\varphi_n)$ также является последовательностью Коши, и, следовательно, имеет предел. Этот-то предел мы и примем за значение функционала $S_{[a,b]}$ на функции f: положим по определению

$$S_{[a,b]}(f) = \lim_{n\to\infty} S_{[a,b]}(\varphi_n). \tag{2.3}$$

Теперь, конечно, необходимо проверить корректность нашего определения: вполне могло бы случиться так, что для разных последовательностей функций, равномерно сходящиеся к f, предел в правой части (2.3) будет иметь разные значения. Однако, используя линейность нашего функционала легко доказать, что такого не произойдет. Действительно, пусть есть две последовательности функций φ_n и ψ_n из нашего пространства $\mathcal{G}([a,b])$, равномерно сходящиеся к функции f. Это означает, что последовательность $\varphi_n - \psi_n$ равномерно стремится к нулю, и, следовательно, числовая последовательность $S_{[a,b]}(\varphi_n - \psi_n)$ также стремится к нулю. Но в силу линейности нашего функционала это означает, что $\lim_{n\to\infty} S_{[a,b]}(\varphi_n - \psi_n) = 0$, то есть $\lim_{n\to\infty} S_{[a,b]}(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty} S_{[a,b]}(\psi_n) = 0$, что и доказывает корректность нашего определения. Таким образом, мы приходим к следующей важной теореме.

Теорема 2.3. *Пусть на некотором подпространстве $\mathcal{G}([a,b]) \subset \mathcal{F}([a,b])$, удовлетворяющем условию (*), задан функционал $S_{[a,b]}$, удовлетворяющий свойствам (1)-(4). Тогда замыкание $\overline{\mathcal{G}([a,b])}$ также удовлетворяет условию (*), и функционал $S_{[a,b]}$ можно единственным образом продолжить на замыкание $\overline{\mathcal{G}([a,b])}$ так чтобы продолжение по-прежнему удовлетворяло условиям (1)-(4).*

Эта теорема уже наполовину нами доказана: мы привели конструкцию продолжения функционала и доказали ее корректность: осталось еще проверить, что замыкание $\overline{\mathcal{G}([a,b])}$ удовлетворяет вслед за $\mathcal{G}([a,b])$ условию (*), а продолжение на него функционала по формуле (2.3) удовлетворяет условиям (1)-(4). Условие (*) получается более или менее автоматически: если отрезок $[c,d] \subset [a,b]$ и имеется последовательность функций φ_n на $[a,b]$ равномерно сходящаяся к функции f, то, конечно, последовательность ограничений функций φ_n на $[c,d]$, которые мы обозначим через $\varphi_n|_{[c,d]}$, равномерно сходится к ограничению функции f на $[c,d]$, которое мы обозначим через $f|_{[c,d]}$: если $\varphi_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$, то $\varphi_n|_{[c,d]} \rightrightarrows f|_{[c,d]}$ на $[c,d]$. Так же автоматически проверяется и аддитивность продолжения: $S_{[a,b]}(f) = \lim_{n\to\infty} S_{[a,b]}(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty}\Big(S_{[a,c]}(\varphi_n|_{[a,c]}) + S_{[c,b]}(\varphi_n|_{[c,b]})\Big) = \lim_{n\to\infty} S_{[a,c]}(\varphi_n|_{[a,c]}) + \lim_{n\to\infty} S_{[c,b]}(\varphi_n|_{[c,b]}) = S_{[a,c]}(f|_{[a,c]}) + S_{[c,b]}(f|_{[c,b]})$. Тем самым мы проверили условие (2). Условие (1) — линейность — сразу же получается из линейности предела: если на $[a,b]$ $\varphi_n \rightrightarrows f$ и $\psi_n \rightrightarrows g$, то $S_{[a,b]}(f+g) = \lim_{n\to\infty} S_{[a,b]}(\varphi_n + \psi_n) = \lim_{n\to\infty} S_{[a,b]}(\varphi_n) + \lim_{n\to\infty} S_{[a,b]}(\psi_n) = S_{[a,b]}(f) + S_{[a,b]}(g)$; для умножения на константу $\lambda S_{[a,b]}(f) = \lambda \lim_{n\to\infty} S_{[a,b]}(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty} S_{[a,b]}(\lambda\varphi_n) = S_{[a,b]}(\lambda f)$, поскольку $\lambda\varphi_n \rightrightarrows \lambda f$. Условие нормировки (4), конечно, выполняется автоматически, так что нам остается проверить условие (3) — положительность. Пусть $\varphi_n \rightrightarrows f$, причем $f \geq 0$ на $[a,b]$. Зафиксируем произвольное положительное ε. Согласно определению равномерного предела существует такой номер N, что $\forall n \geq N$ $\forall x \in [a,b]$ $f(x) - \varepsilon < \varphi_n(x) < f(x) + \varepsilon$, откуда учитывая $f \geq 0$ получаем $-\varepsilon < \varphi_n(x)$, и, следовательно, $-\varepsilon(b-a) \leq S_{[a,b]}(\varphi_n)$. Из теоремы о предельном переходе в неравенстве из этого следует, что $-\varepsilon(b-a) \leq \lim_{n\to\infty} S_{[a,b]}(\varphi_n) = S_{[a,b]}(f)$. Таким образом, мы доказали, что $\forall\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $S_{[a,b]}(f) \geq -\varepsilon(b-a)$, из чего, конечно, сразу следует неотрицательность числа $S_{[a,b]}(f)$. Теорема 2.3 доказана.

Тем самым теорема 2.1 позволяет очень сильно расширить имеющийся у нас запас интегрируемых функций.

Следствие 2.2. *Замыкание пространства ступенчатых функций* $\overline{\mathcal{J}([a,b])}$ *удовлетворяет условию (*), и на нем существует единственный функционал* $S_{[a,b]}$ *можно единственным образом продолжить на замыкание* $\overline{\mathcal{G}([a,b])}$ *так чтобы продолжение по-прежнему удовлетворяло условиям (1)-(4).*

Как описать замыкание $\overline{\mathcal{J}([a,b])}$, на котором нам уже удалось построить функционал $S_{[a,b]}$? Точное его описание мы отложим до следующего раздела, а сейчас отметим только, что согласно теореме 1.1 это замыкание содержит все непрерывные (и даже кусочно-непрерывные) функции.

3 Другой подход: пространство первообразных. Теорема Ньютона-Лейбница.

Рассмотрим еще одно пространство функций, для которого очень легко чисто алгебраически построить функционал $S_{[a,b]}$ удовлетворяющий условиям (1)-(4). Это пространство таких ограниченных функций f на отрезке $[a, b]$, которые обладают первообразной, то есть такой дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функцией F, что $f = F'$. Линейность операции дифференцирования гарантирует нам, что множество таких функций образует линейное подпространство в $\mathcal{F}([a, b])$, обозначим его, скажем, $\mathcal{A}([a, b])$. Очевидно, $\mathcal{A}([a, b])$ удовлетворяет условию (*): ограничение первообразной F для f на отрезок $[c, d] \subset [a, b]$ конечно же, является первообразной для ограничения f на $[c, d]$. Функционал $S_{[a,b]}$ на пространстве $\mathcal{A}([a, b])$ можно задать очень простой формулой: если F является первообразной для f, то положим

$$S_{[a,b]}(f) = F(b) - F(a). \tag{3.1}$$

Конечно, первообразная для функции f определена не совсем однозначно, но с точностью до произвольной константы C, что, конечно, не влияет на результат в правой части (3.1): $(F(b)+C)-(F(a)+C) = F(b)-F(a)$, так что наше определение $S_{[a,b]}$ корректно. Проверить выполнение условий (1)-(4) очень легко. Линейность (1) следует из линейности операции дифференцирования. Аддитивность (2) получается мгновенно: $S_{[a,c]}(f) + S_{[c,b]} = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a) = S_{[a,b]}(f)$. Положительность (3) есть признак монотонности функции F: если $F' = f \geq 0$, то F является монотонной функцией, так что $F(b) \geq F(a)$,так что $F(b) - F(a) \geq 0$. Наконец, нормировка (4) проверяется непосредственно: если $f = 1$, то ее первообразная $F(x) = x$, поэтому $F(b) - F(a) = b - a$.

Пока что нам не до конца понятно, на каком пространстве мы построили интересующий нас функционал, т.е. как более явно описать функции, обладающие первообразной. Заметим, однако, что эта конструкция подсказывает идею конструирования первообразных для интегрируемых функций: если функция f обладает первообразной на отрезке $[a, b]$, и мы знаем, что функционал $S_{[a,b]}$ определен для нашей функции единственным образом (а мы знаем много таких функций: см следствие 2.2), то при $x \in [a, b]$

$$F(x) = S_{[a,x]}(f). \tag{3.2}$$

В принципе, правая часть формулы (3.2) определена для любой функции $f \in \mathcal{G}([a,b])$, если только на $f \in \mathcal{G}([a,b])$ определен функционал $S_[a,b]$, поэтому определенную этой формулой функцию[1] можно рассматривать как естественную кандидатуру на первообразную функции f. Попробуем выяснить, насколько F подходит на эту роль.

Предложение 3.1. *Функция F непрерывна на $[a,b]$.*

Для доказательства непрерывности функции F в точке $x_0 \in [a,b]$ нам надо оценить $|F(x_0) - F(x)|$; в зависимости от того, правее или левее от x_0 лежит точка x, это выражение равно $S_{[x_0,x]}(f)$ или $S_{[x_0,x]}(f)$. В любом случае, если мы обозначим через I отрезок с концами x_0 и x, теорема об оценке (3") дает оценку

$$|F(x_0) - F(x)| \leq \sup_{t \in I}(|f(t)|)|x_0 - x|. \tag{3.3}$$

Напомним, что мы работаем только с ограниченными функциями, поэтому для данной функции f существует такое M, что $|f(x)| \leq M$ на $[a,b]$, поэтому $\sup_{t \in I}(|f(t)|) \leq M$. Итого, получаем оценку $|F(x_0) - F(x)| \leq M|x_0 - x|$. Теперь мы можем доказать непрерывность функции f в точке x_0 просто исходя из определения. Если нам дано положительное число ε, то мы можем легко указать такое $\delta > 0$, что если $|x_0 - x| < \delta$ то $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$: достаточно положить $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$.

Та же оценка легко позволяет доказать и дифференцируемость функции F в точке x_0; для этого только необходима непрерывность функции f в точке x_0.

Теорема 3.1. *Если функция f непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$, то F дифференцируема в точке x_0, причем $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Конечно, при доказательстве мы будем использовать уже высказанные соображения, и опять случаи, когда точка x находится по разные стороны от x_0 удобнее разбирать отдельно. Пусть, например, $x > x_0$; нам для доказательства существования правой производной в точке x_0 нам надо доказать существование предела $\lim_{x \to x_0+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$. Обозначим точные верхние грани множества значений функции f на $[x_0, x]$ через $M = \sup_{t \in [x_0,x]} f(t)$ и $m = \inf_{t \in [x_0,x]} f(t)$; тогда вследствие монотонности получаем для $F(x) - F(x_0) = S_{[x_0,x]}(f)$ оценку $m < \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} < M$,

[1]Обычно эта функция называется "интегралом с переменным верхним пределом": в традиционных обозначениях $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

причем m и M можно рассматривать как функции от x. Поскольку f непрерывна в точке x_0, $\lim_{x\to x_0+} m = \lim_{x\to x_0+} M = f(x_0)$, поэтому и $\lim_{x\to x_0+} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$. Совершенно аналогично получается такое же равенство для предела слева $\lim_{x\to x_0-} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$, из чего следует, что предел $\lim_{x\to x_0-} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0})$ существует и равен $f(x_0)$. Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.1, показывающая, что задачи вычисления площади криволинейной трапеции и вычисления производной являются взаимно обратными, обычно называется теоремой Ньютона-Лейбница. Особенно сильное следствие для нее получается для непрерывных функций — с одной стороны, мы уже доказали существование функционала $S_{[a,b]}$ на пространстве непрерывных функций $C([a,b])$, а с другой стороны для непрерывной функции мы можем применить теорему 3.1 в любой точке.

Следствие 3.1. *Любая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция обладает первообразной, которую можно записать в виде $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.*