1 Вводная лекция

2 Квантование: частицы и струны

3 Двумерные теории бозонов и фермионов

4 Операторный формализм для скалярного поля

5 Тензор энергии импульса и примарные операторы

6 Фермионы и системы первого порядка

7 Бозонизация и однопетлевые статсуммы

8 Бозоны на торе и фермионы

9 Теорема Нётер и конформные тождества Уорда

10 Конформные блоки для алгебры Вирасоро

10.1 Бутстрапный подход к двумерной конформноой теории поля

В этой лекции мы будем работать в рамках так называемого негамильтонова подхода. Не будет никакой формулы для лагранжиана или гамильтониана. Рассуждения будут основываться на конформной симметрии и наличии структуры операторного произведения.

Пространство полей является представления произведения двух алгебр Вирасоро (голоморфной и антиголоморфной) $\mathsf{Vir} \otimes \overline{\mathsf{Vir}}$. Напомним коммутационные соотношения

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{n^3-n}{12}\delta_{n+m,0}. \tag{10.1}$$

Если $c = 0$, то алгебра Вирасоро совпадает с алгеброй векторных полей на окружности (алгебраических векторных полей на $\mathbb{C}^\times$) $L_n = -z^{n+1}\partial/\partial z$. Никакой группы Вирасоро нет. В алгебре Вирасоро есть трехмерная подалгебра $\langle L_{-1}, L_0, L_1\rangle$ она изомрфна алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2$. Эта подалгебра есть алгебри Ли группы глобальных конформных преобразований сферы Римана $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$.

Поле Φ имеет конформную размерность $(\Delta, \overline{\Delta})$ если

$$L_0\Phi = \Delta\Phi, \quad \overline{L}_0 = \overline{\Delta}\Phi. \tag{10.2}$$

Оператор L_n переводит такое поле Φ в поле с размерностью $(\Delta + n, \overline{\Delta})$. Обычно по физическим причинам (унитарность теории или условие что корреляторы спадают на бесконечности) предполагают, что в теории нет (или почти нет) полей с отрицательной размерностью. Таким образом действуя операторами L_n с $n > 0$ мы дойдем до поля которое удовлетворяет условию

$$L_k\Phi = 0, k > 0 \quad L_0\Phi = \Delta\Phi. \tag{10.3}$$

Аналогичного условия можно достичь и по антиголоморфной алгебре Вирасоро. Поля удовлетворяющие условию 10.3 называются примарными (иногда еще используют термин первичные). Поля который получаются из примерного поля Φ при помощи действия алгебры Вирасоро называются потомками. Немного неформально, можно называть генераторы L_k с $k > 0$ операторами уничтожения, а операторы L_k, $k < 0$ операторами рождения. Легко видеть, что любой потомок примерного поля Φ является комбинацией потомков вида

$$L_{-\lambda}\overline{L}_{-\bar{\lambda}}\Phi = L_{-\lambda_1}L_{-\lambda_2}\cdots L_{-\lambda_k}L_{-\overline{\lambda}_1}L_{-\overline{\lambda}_2}\cdots L_{-\overline{\lambda}_{\overline{k}}}\Phi, \tag{10.4}$$

где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \ldots \geq \lambda_k$ и $\overline{\lambda}_1 \geq \overline{\lambda}_2 \ldots \geq \overline{\lambda}_{\overline{k}}$.

Являются ли эти потомки линейно зависимыми? На этот вопрос ответ дает теорема Каца-Фейгина-Фукса.

10.2 Представления алгебры Вирасоро

Теперь станем на еще более абстрактную точку зрения. Модулем Верма над алгеброй Вирасоро называется представление свободно порожденное м вектором $|\Delta\rangle$

$$L_k\Phi = 0, k > 0 \quad L_0\Phi = \Delta\Phi. \tag{10.5}$$

Такой вектор $|\Delta\rangle$ называется старшим вектором (некоторое удвоение терминологии, соответствующие поля назывались примарными), число Δ называется старшим весом. Условие свободной порожденности по тереме Пуанкаре-Биркгофа-Витта означает, что вектора вида

$$L_{-\lambda_1}L_{-\lambda_2}\cdots L_{-\lambda_k}|\Delta\rangle, \lambda_1 \geq \lambda_2 \ldots \geq \lambda_k \tag{10.6}$$

Модуль Верма мы будем обозначать $\mathrm{V}_{\Delta,c}$. Теорема Каца-Фейгина-Фукса (см. ниже) утверждает, что при общих значениях Δ, c модуль Верма неприводим. Однако при специальных значениях этот модуль уже становится приводимым. Это означает, что существует какой-то подмодуль $U \subset \mathrm{V}_{\Delta,c}$. Легко видеть, что существование такого подмодуля эквивалентно существованию особого (сингулярного) вектора v на каком-то уровне $N > 0$:

$$l_k v = 0, k > 0 \quad L_0 v = (\Delta + N)v, \quad v \in \mathrm{V}_{\Delta,c}. \tag{10.7}$$

Ниже мы будем часто использовать следующую (Лиувиллевскую параметризацию)

$$c = c(b) = 1 + 6(b^{-1} + b)^2, \quad \Delta = \Delta(P, b) = (\frac{b^{-1} + b}{2})^2 - P^2. \tag{10.8}$$

Видно, что параметр P определен с точностью до знака. У параметра b при данном c свободы еще больше, можно заменять $b \mapsto \pm b^{\pm 1}$. Ниже мы фиксируем какое значение b.

Теорема (Кац-Фейгин-Фукс)**.** *При $\Delta = \Delta_{mn} = \Delta(P_{mn}, b)$, где $P_{m,n} = (mb^{-1} + nb)/2$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $mn > 0$ модуль Верма $\mathrm{V}_{\Delta,c}$ имеет особый вектор на уровне $N = mn$. Иначе модуль Верма $\mathrm{V}_{\Delta,c}$ неприводим.*

Часто можно считать, что не произведение $mn > 0$, а сами $m, n > 0$ потому, что замена знака у P не меняет $\Delta(P, b)$. Соответствующий сингулярный вектор обозначается $D_{mn}(b)|\Delta\rangle$. К сожалению, в общем случае никакой простой явной формулы для оператора $D_{mn}(b)$ нет.

Примеры.

1. Пусть $\Delta = \Delta_{11} = 0$. Тогда $D_{11} = L_{-1}$, то есть вектор $L_{-1}|0\rangle$ является сингулярным.

2. Пусть $\Delta = \Delta_{12}$. Тогда $D_{11} = L_{-1}^2 + b^2 L_{-2}$ (см. задачи).

Как обычно, характром модуля Верма мы будем называть $\mathrm{Tr}(q^{L_0 - c/24})$. Тогда характер модуля Верма равен

$$\chi(\mathrm{V}_{\Delta,c}) = \frac{q^{\Delta - c/24}}{\prod_{k=1}^{\infty}(1 - q^k)}. \tag{10.9}$$

Если $\Delta = \Delta_{m,n}$ то можно считать характер неприодимого фактора $\mathrm{L}_{\Delta_{m,n},c}$. Он меньше характера модуля Верма из-за факторизации по по подмодулю.

Заметим, что разные специальные $\Delta_{m,n}$ при общем b между собой не равны. Действительно, если $\Delta_{m,n} = \Delta_{m',n'}$, то $P_{m,n} = \pm P_{m',n'}$, откуда $b^2 = (m \mp m')/(n \mp n')$. Значит если b^2 иррациональное, то особый вектор в модуле Верма $V_{\Delta_{m,n},c}$ только один и имеет размерность $\Delta_{m,n} + mn = \Delta_{-m,n}$ подмодуль им порожденный изоморфен неприводимому модулю Верма. Значит характер неприводимого представления $\mathrm{L}_{\Delta_{m,n},c}$ равен

$$\chi(\mathrm{L}_{\Delta_{m,n},c}) = \frac{q^{\Delta_{m,n} - c/24}(1 - q^{mn})}{\prod_{k=1}^{\infty}(1 - q^k)}. \tag{10.10}$$

Случай специального b (т.е. рационального b^2) более сложен и интересен. В этой лекции мы про него говорить не будем.

Мы не доказывали и не будем доказывать теорему Каца-Фейгина-Фукса. Вместо этого мы прокомментируем возможный способ доказательства поскольку в нем появляются важные для дальнейшего сущности. Во первых, существование особого вектора на уровне mn в модуле $\mathrm{V}_{\Delta_{m,n},c}$ равносильно существованию сплетающего (коммутирующего с алгеброй Вирасоро) оператора из $\mathrm{V}_{\Delta_{-m,n},c}$ в $\mathrm{V}_{\Delta_{m,n},c}$. Такой оператор строится при помощи так называемых скринингов (экранирующих операторов) которые будут еще обсуждаться.

Во вторых, надо показать, что других особых векторов нет. Для этого считают определитель формы Шаповалова. Эта симметричная форма определеная на любом модуле Верма $\mathrm{V}_{\Delta,c}$ правилом сопряжения $L_n^\dagger = L_{-n}$ и нормировкой старшего вектора $\langle\Delta,\Delta\rangle = 1$. Легко видеть, что любой старший вектор лежит в ядре формы Шаповалова. Более того, любой его потомок вида $L_{-\lambda}v$ тоже лежит в ядре. Таким образом определитель формы Шаповалова на уровне $N = mn$ делится на $\Delta - \Delta_{m,n}$. А если уровень $N > mn$, то определитель формы делится на $(\Delta - \Delta_{m,n})^{p(N-mn)}$, где $P(N - mn)$ — число диаграмм Юнга из $N - mn$ клеток. Дальше оценивая степень определителя формы Шаповалова как многочлена от Δ получаем, что $\Delta = \Delta_{m,n}$ это всего его нули, значит других особых векторов нет.

Зафиксируем обозначения на будущее. Через $G_{\lambda,\mu} = \lambda\Delta|L_\lambda L_{-\mu}|\Delta\rangle$ мы обозначим матрицу формы Шаповалова. Через $G^{-1}_{\lambda,\mu}$ обратную матрицу.

10.3 Конформные блоки

Вернемся теперь к корреляционным функциям. Напомним, что в прошлый раз показывали (?), что примерные поля при дробно-линейных преобразованиях меняются как

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},\ \ ad-bc=1, \qquad \Phi_{\Delta,\overline{\Delta}}(z,\bar{Z}) \mapsto (cz+d)^{-2\Delta}(\bar{c}\bar{z}+\bar{d})^{-2\overline{\Delta}}\Phi_{\Delta,\overline{\Delta}}(z,\bar{Z}). \tag{10.11}$$

В частности благодаря этому четырехточечная корреляционная функция может быть сведена к четырехточечной функции от двойного отношения точек

$$\langle\Phi_1(z_1,\bar{z}_1)\Phi_2(z_2,\bar{z}_2)\Phi_3(z_3,\bar{z}_3)\Phi_4(z_4,\bar{z}_4)\rangle = \prod z_{ij}^{\gamma_{ij}}\bar{z}_{ij}^{\bar{\gamma}_{ij}}G(z,\bar{z}), \tag{10.12}$$

где $z_{ij} = z_i - z_j$, $\gamma_{12} = \gamma_{13} = 0$, $\gamma_{14} = -2\Delta_1$ $\gamma_{24} = \Delta_1+\Delta_3-\Delta_2-\Delta_4$, $\gamma_{34} = \Delta_1+\Delta_2-\Delta_3-\Delta_4$, $\gamma_{23} = \Delta_4 - \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3$,$\bar{\gamma}$ так же связаны с $\overline{\Delta}_i$ и $G(z,\bar{z})$ некоторая функция от двойного отношения

$$z = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{14}z_{32}}, \quad \bar{z} = \frac{\bar{z}_{12}\bar{z}_{34}}{\bar{z}_{14}\bar{z}_{32}}. \tag{10.13}$$

Функцию $G(z,\bar{z})$ можно себе представлять как матричный элемент

$$G(z,\bar{z}) = \langle\Delta_1,\overline{\Delta_1}|\Phi_2(1)\Phi_4(z)|\Delta_3,\overline{\Delta_3}\rangle. \tag{10.14}$$

Теперь вставляя внутрь полный набор в виде всевозможных потомков вида (10.4) мы получаем

$$G(z,\bar{z}) = \sum_{\Delta,\overline{\Delta}} C_{12}^{\Delta}C_{34}^{\Delta}\bar{z}^{\overline{\Delta}-\overline{\Delta}_3-\overline{\Delta}_4}z^{\Delta-\Delta_3-\Delta_4}\left(\sum_{\lambda,\mu,|\lambda|=|\mu|} z^{|\lambda|}\langle\Delta_1|\Phi_{\Delta_2}L_{-\lambda}|\Delta\rangle\langle\Delta|L_\mu\Phi_{\Delta_4}|\Delta_3\rangle G^{-1}_{\lambda,\mu}\right)$$
$$\left(\sum_{\bar{\lambda},\bar{\mu},|\bar{\lambda}|=|\bar{\mu}|} z^{|\bar{\lambda}|}\langle\overline{\Delta}_1|\Phi_{\overline{\Delta}_2}L_{-\bar{\lambda}}|\overline{\Delta}\rangle\langle\overline{\Delta}|L_{\bar{\mu}}\Phi_{\overline{\Delta}_4}|\overline{\Delta}_3\rangle G^{-1}_{\bar{\lambda},\bar{\mu}}\right). \tag{10.15}$$

Коэффициенты C_{ij}^{Δ} называются структурными константами. В формуле (10.15) после суммирования по всем допустимым в теории промежуточным конформным размерностям $(\Delta, \overline{\Delta})$ произошла факторизация на вклад от голоморфных и антиголоморфных потомков. Первый из этих вкладов называется конформным блоком

$$\mathcal{F}(\vec{\Delta}, \Delta, c|z) = \sum_{\lambda,\mu,|\lambda|=|\mu|} z^{|\lambda|} \langle \Delta_1 | \Phi_{\Delta_2} L_{-\lambda} | \Delta \rangle \langle \Delta | L_{\mu} \Phi_{\Delta_4} | \Delta_3 \rangle G_{\lambda,\mu}^{-1} =$$
$$= 1 + \frac{(\Delta - \Delta_1 + \Delta_2)(\Delta - \Delta_4 + \Delta_3)}{2\Delta} z + \dots \quad (10.16)$$

или точнее четырехточечтным конформным блоком на сфере. Аналогично можно определить и многоточечные конформные блоки. Напомним (см. задачу 6 листика 5), что операторы Φ_{Δ} удовлетворяют соотношению

$$[L_k, \Phi_{\Delta}] = (z^{k+1} \frac{\partial}{\partial z} + (k+1) z^k \Delta) \Phi_{\Delta}(z). \quad (10.17)$$

Из этой формулы можно найти все члены в разложении по z в формуле (10.16), в частности приведенный там первый член.

Пример. Рассмотрим теорию свободного бозонного поля $T(z) = \frac{1}{2}(\partial X(z))^2$. Рассмотрим коррелятор четырех голоморфных вертексных операторов $V_{\alpha} = \exp(i\alpha X)$

$$\langle V_{\alpha_3}(0) V_{\alpha_4}(z) V_{\alpha_2}(1) V_{\alpha_1}(\infty) \rangle = \delta_{\sum \alpha_i} z^{\alpha_3 \alpha_4} (1-z)^{\alpha_2 \alpha_4}. \quad (10.18)$$

С предыдущей формулой это можно сравнить следующим образом. Конформные размерности $\Delta_i = \frac{1}{2}\alpha_i^2$. Условие сохранения импулься влечет что $\alpha = \alpha_1 + \alpha_4 = -\alpha_2 - \alpha_3$. Тогда по формуле (10.16) имеем

$$\mathcal{F}(\vec{\Delta}, \Delta, c|z) = 1 - \alpha_2 \alpha_3 z + \dots, \quad (10.19)$$

что согласуется с формулой (10.18).

10.4 Конфомные блоки вырожденных полей

Случай специаьных внешних размерностей Δ_i четырехточечного конформного блока (10.16) является особенно важным. Предположим, что одно $\Delta_i = \Delta_{m,n}$ и более того потомок $D_{m,n}\Phi_i$ зануляется. Последнее условие обычно выполняется в примерах, физически оно может быть мотивировано выкидыванием состояний с нулевой нормой. Поле размерности $\Delta_{m,n}$ с зануляющимся потомком на уровне mn мы будем обозначать $\Phi_{m,n}$.

Рассмотрим простейший пример — пусть одно из внешних полей равно $\Phi_{1,1}$. Поместим его в ноль, т.е. рассмотрим матричный элемент вида $\langle \Delta_3 | \Phi_2(1) \Phi_1(z) | \Delta_{1,1} \rangle$. Для того, чтобы Δ была допустимой промежуточной размернстью, надо чтобы существовал оператор $\Phi_1(z)$

действующий из неприводимого фактора $\mathrm{L}_{\Delta_{1,1},c}$ в модуль Верма $\mathrm{V}_{\Delta,c}$ удовлетворяющий соотношениям (10.17). Легко видеть, что

$$\langle\Delta|\Phi_1(z)L_{-1}|\Delta_{1,1}\rangle = (\Delta_{1,1}+\Delta_1-\Delta)z^{\Delta_{1,1}+\Delta_1-\Delta-1}. \tag{10.20}$$

Так как $\Delta_{1,1}=0$ то этот матричный элемент зануляется только если $\Delta_1=\Delta$. Это означает, что при слиянии поля $\Phi_{1,1}$ с любым полем Φ_Δ получается только поле Φ_Δ (и возможно его потомки). Символически этом можно записать как:

$$\Phi_{1,1}\Phi_\Delta = [\Phi_\Delta]. \tag{10.21}$$

На самом деле это не удивительно, поле $\Phi_{1,1}(z)$ можно отождествить с единичным оператором I. В самом деле, поле I тоже имеет размерность 0 и тоже удовлетворяет соотношению $\partial_z I=0$.

Рассмотрим следующий по сложности пример — поле $\Phi_{12}(z)$. Можно рассуждать дословно также как в прошлом случае, но мы оформим рассуждение по другому. А именно из условия зануления особого вектора $b^{-2}L_{-1}^2+L_{-2}$ следует, что конформный блок удовлетворяет соотношению

$$\left(b^{-2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\sum_{i=1}^{3}(\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2}+\frac{1}{z-z_i}\frac{\partial}{\partial z_i})\right)\langle\Phi_{1,2}(z)\Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)\Phi_3(z_3)\rangle = 0. \tag{10.22}$$

Если разрешено слияние полей $\Phi_{1,2}$ и Φ_1 в какое-то поле Φ_Δ, то уравнение (10.22) имеет решение с асимптотикой $(z-z_1)^X$, где $X=\Delta-\Delta_1-\Delta_{1,2}$. Подставляя эту ассимптотику в уравнение получаем квадратное уравнения на X

$$b^{-2}X(X-1)+\Delta_1 X - X = 0. \tag{10.23}$$

Используя параметризацию (10.8) мы получаем, что решения этого уравнения есть $P=P_1\pm b/2$. То есть слияние с вырожденным полем $\Phi_{1,2}$ имеет вид

$$\Phi_{1,2}\Phi_{\Delta(P,b)} = [\Phi_{\Delta(P-b/2,b)}]+[\Phi_{\Delta(P+b/2,b)}]. \tag{10.24}$$

Для поля $\Phi_{2,1}$ все будет аналогично, но с заменой $b\mapsto b^{-1}$

$$\Phi_{2,1}\Phi_{\Delta(P,b)} = [\Phi_{\Delta(P-b^{-1}/2,b)}]+[\Phi_{\Delta(P+b^{-1}/2,b)}]. \tag{10.25}$$

Для поля $\Phi_{1,3}$ мы не будем смотреть на уравнение третьего порядка, а поступим хитрее. А именно из формулы (10.24) следует, что $\Phi_{1,2}\Phi_{1,2}=[\Phi_{1,1}]+[\Phi_{1,3}]$ и ассоциативности следует, что

$$\Phi_{1,3}\Phi_{\Delta(P,b)} = [\Phi_{\Delta(P-b,b)}]+[\Phi_{\Delta(P,b)}]+[\Phi_{\Delta(P+b,b)}]. \tag{10.26}$$

И так основываясь на ассоциативности и формула (10.24) и мы получаем правила слияния (фьюжен) для произвольного поля $\Phi_{m,n}$

$$\Phi_{m,n}\Phi_{\Delta(P,b)} = \sum_{r,s}[\Phi_{\Delta(P+rb^{-1}/2+sb/2,b)}], \tag{10.27}$$

где суммирование ведется по региону $1-m\le r\le m-1$, $1-n\le s\le n-1$, и числа $m-r+1$, $n-s+1$ — четные.

10.5 Полюса конформных блоков по Δ

Вычислять конформные блоки по определению (10.16) довольно тяжело. Ответы становятся очень большими. Поэтому полезно иметь другую информацию и какие-то еще непрямые способы вычисления. Один из таких способов это изучение конформного блока как функции от внутренней размерности Δ, этот способ принадлежит Алексею Замолодчикову.

Заметим, что полюса по параметру Δ в конформном блоке могут возникнуть только от обращения матрицы $G_{\lambda,\mu}$ — формы Шаповалова. И мы уже знаем, что эта форма становится вырожденной только при $\Delta = \Delta_{m,n}$. В этом случае в ядре формы лежит весь подмодуль порожденный вектором $D_{m,n}|\Delta\rangle$.

Чтобы понять чему равен вычет при $\Delta = \Delta_{m,n}$ выберем в модуле $\mathrm{V}_{\Delta,c}$ другой базис. А именно включим в базис вектора вида $L_{-\lambda}D_{m,n}|\Delta\rangle$, остальные вектора выберем ортогональными к этим. Знаменатель $\Delta - \Delta_{m,n}$ будет только у вкладов векторов вида $L_{-\lambda}D_{m,n}|\Delta\rangle$. Поэтому

$$Res_{\Delta=\Delta_{m,n}}\mathcal{F}(\vec{\Delta},\Delta,c;z) = Res_{\Delta=\Delta_{m,n}}\sum_{\lambda,\mu,|\lambda=|\mu||} z^{|\lambda|+mn}\langle\Delta_1|\Phi_{\Delta_2}L_{-\lambda}D_{m,n}|\Delta\rangle\langle\Delta|L_\mu D^\dagger_{m,n}\Phi_{\Delta_4}|\Delta_3\rangle(G^{(m,n)}_{\lambda,\mu})^{-1} \tag{10.28}$$

где $G^{(m,n)}_{\lambda,\mu} = \langle\Delta|D^\dagger_{m,n}L_\mu L_{-\lambda}D_{m,n}|\Delta\rangle$ форма Шаповалова на потомках вектора $D_{m,n}|\Delta\rangle$. Теперь заметим, что

$$G^{(m,n)}_{\lambda,\mu} = \langle\Delta|D^\dagger_{m,n}D_{m,n}|\Delta\rangle\langle\Delta_{-m,n}|L_\mu L_{-\lambda}|\Delta_{-m,n}\rangle + O((\Delta-\Delta_{m,n})^2), \tag{10.29}$$

где первый член делится на $(\Delta - \Delta_{m,n})$ лидирующий член возникает когда L_μ и $L_{-\lambda}$ «убивают» друг друга, а следующий член возникает, когда они начинают действовать на $D_{m,n}$ и $D^\dagger_{m,n}$. Кроме того

$$\frac{\langle\Delta_1|\Phi_{\Delta_2}L_{-\lambda}D_{m,n}|\Delta\rangle}{\langle\Delta_1|\Phi_{\Delta_2}D_{m,n}|\Delta\rangle} = \frac{\langle\Delta_1|\Phi_{\Delta_2}L_{-\lambda}|\Delta\rangle}{\langle\Delta_1|\Phi_{\Delta_2}|\Delta+mn\rangle}, \tag{10.30}$$

и аналогично для второго матричного элемента. Значит

$$Res_{\Delta=\Delta_{m,n}}\mathcal{F}(\vec{\Delta},\Delta,c;z) = z^{mn}R_{m,n}\mathcal{F}(\vec{\Delta},\Delta_{-m,n},c;z) \tag{10.31}$$

где

$$R_{m,n} = Res_{\Delta=\Delta_{m,n}}\left(\frac{\langle\Delta_1|\Phi_{\Delta_2}D_{m,n}|\Delta\rangle\langle\Delta|D^\dagger_{m,n}\Phi_{\Delta_4}|\Delta_3\rangle}{\langle\Delta|D^\dagger_{m,n}D_{m,n}|\Delta\rangle}\right). \tag{10.32}$$

Множитель $R_{m,n}$ не зависит от z, он вычисляется только при помощи сингулярного вектора $D_{m,n}|\Delta\rangle$. Более того информация о его нулях содержится в правилах слияния (10.27). Действительно, полюс в конформном блоке пропадает, если в слиянии полей $\Phi_{m,n}$ и Φ_{Δ_1}

есть поле Φ_{Δ_2} или если в слиянии полей $\Phi_{m,n}$ и Φ_{Δ_3} есть поле Φ_{Δ_4}. Значит в терминах параметров P_i в параметризации (10.8) $R_{m,n}$ должен делится на

$$P_{mn} = \prod_{r,s} (P_1+P_2+r\frac{b^{-1}}{2}+s\frac{b}{2})(P_1-P_2+r\frac{b^{-1}}{2}+s\frac{b}{2})(P_3+P_4+r\frac{b^{-1}}{2}+s\frac{b}{2})(P_3-P_4+r\frac{b^{-1}}{2}+s\frac{b}{2}), \tag{10.33}$$

где r, s пробегают тот же регион что и в формуле (10.27). Полюса функции $R_{m,n}$ описать сложнее. Правильный ответ имеет вид $D_{m,n}|\Delta\rangle$

$$A_{mn} = 2 \prod'_{1-m\leq i\leq m, 1-n\leq j\leq n} (ib^{-1} + jb) \tag{10.34}$$

где $'$ означает, что сомноители соответствующие $(i, j) = (0, 0)$ и $(i, j) = (m, n)$ выкидываются. Тогда $R_{m,n} = P_{m,n}/A_{m,n}$ и можно написать формулу

$$\mathcal{F}(\vec{\Delta}, \Delta, c|z) = f(\vec{\Delta}, c|z) + \sum_{m,n} \frac{P_{mn}}{A_{mn}(\Delta - \Delta_{m,n})} \mathcal{F}(\vec{\Delta}, \Delta_{m,-n}, c|z), \tag{10.35}$$

где $f(\vec{\Delta}, c|z)$ — предел конформного блока при $\Delta \to \infty$. Легче найти другой предел конформного блоко при $c \to \infty$ см. задачи. Таким образом можно написать аналогичную формулу, но только разлагая по вычетам $c - c_{m,n}$.