

Теория чисел. Экзамен

1. Какие простые числа можно записать в виде $x^2 + 13y^2$, где x и y - рациональные числа? Если можно, то сколькими способами?
2. При каких простых p идеал $(p) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ - простой?
3. Вычислите группу классов идеалов кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$.
4. Какие простые числа можно записать в виде $x^2 + 13y^2$, где x и y - целые числа? Если можно, то сколькими способами?
5. Какие целые числа можно записать в виде $x^2 + 13y^2$, где x и y - целые числа?
6. Пусть A - максимальный порядок в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Найдите образующие группы единиц в A .
7. Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Вычислите предел

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta_K(s).$$

8. Пусть A - максимальный порядок в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Для вещественного числа r , обозначим через $N(r)$ число идеалов $I \subset A$ с нормой $\leq r$. Вычислите предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{r}.$$