Листок 8. Числовые ряды

Анализ, 1 курс, **26.01.2017**

8◇1 Пусть ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся и пусть $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$. Докажите, что $\sum c_n$ тоже сходится.

8◇2 Пусть $a_n, b_n > 0$ и $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$, а $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leqslant K < \infty$. Докажите, что ряды $\sum a_n$, $\sum b_n$ сходятся и расходятся одновременно.

8◇3 Исследуйте следующие положительные ряды на сходимость:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^{\sqrt{n}}$; **б)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^{\ln n}$, где $q \in (0,1)$; **в)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$; **г)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

8◇4 Пусть $a_n > 0$, $a_n \to 0$. Докажите, что существует такая монотонно убывающая последовательность $b_n > 0$, что ряд $\sum b_n$ расходится, а ряд $\sum a_n b_n$ — сходится.

8◇5 Пусть $a_n > 0$ — монотонная последовательность, $a_n \to 0$.
а) Следует ли отсюда, что ряд $\sum (-1)^n a_n$ сходится? Останется ли утверждение пункта верным, если отбросить требование монотонности a_n?
б) Пусть σ_k — периодическая последовательность чисел 0 и 1 с периодом $(0,1,0,0,1,1)$. Следует ли отсюда, что ряд $\sum (-1)^{\sigma_n} a_n$ сходится?
в) Пусть μ_k — периодическая последовательность чисел 0 и 1 с периодом $(0,1,1,0,0,0,1)$. Следует ли отсюда, что ряд $\sum (-1)^{\mu_n} a_n$ сходится?

8◇6 Пусть ряд $\sum a_n$ сходится. Обязательно ли сходятся ряды **а)** $\sum a_n^2$; **б)** $\sum a_n^3$.

8◇7 Пусть ряд $\sum a_n$ сходится, и пусть $\lim a_n/b_n = 1$. Следует ли из этого, что ряд $\sum b_n$ тоже сходится?

8◇8 Сходится ли ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$, где F_n — числа Фибоначчи? (Числа Фибоначчи определяются условием $F_1 = F_2 = 1$ и рекуррентной формулой $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ при $n > 1$.)

8◇9 Исследуйте на сходимость знакопеременные ряды: **а)** $\sum \frac{\cos n}{n}$; **б)** $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}}$.

8◇10 Для произвольного подмножества $M \subset \mathbb{N}$ будем называть суммой частичного ряда, соответствующего M, величину $S(M) = \sum_{n \in M} a_n$ (по определению $S(\emptyset) = 0$). Существует ли такой ряд $\sum a_n$, что $a_n \to 0$ и суммы всех его частичных рядов заполняют канторово множество?

8◇11 (*) Сходится ли ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}$, где p_n — n-е простое число?