Листок 1. Ортогональные системы

Анализ, 2 курс, весенний семестр, **10.01.2017**

1⋄1 Пусть (x, y) обозначает скалярное произведение в евклидовом пространстве.
а) Докажите, что функция $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ удовлетворяет аксиомам нормы.
б) Докажите, что в евклидовом пространстве равенство $|(x,y)| = \|x\| \cdot \|y\|$ выполнено тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы.

1⋄2 Доказать, что нормированное пространство является евклидовым тогда и только тогда, когда для любых двух векторов x и y выполнено равенство параллелограмма:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

1⋄3 Докажите, что следующие пространства не являются евклидовыми:
а) l_p при $p \in [1,2) \cup (2,\infty]$; **б)** $C[0,1]$; **в)** $L_p[0,1]$ при $p \in [1,2) \cup (2,\infty]$.

1⋄4 Примените процесс ортогонализации Грамма–Шмидта к системе $\{1, t, t^2\}$ в пространствах
а) $L_2[-1,1]$; **б)** $L_2[0,1]$.

1⋄5 Показать, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi/6$. Указание: применить равенство Парсеваля к функции $x(t) = t$ в пространстве $L_2([0,\pi];\mathbb{R})$ с ортогональной системой $\{\sin kt,\ k \in \mathbb{N}\}$.

1⋄6 В пространстве $L_2[-1,1]$ построить ортогональное дополнение для следующих множеств
а) $M = \{x \in L_2[-1,1] :\ x(t) = 0$ для всех $t \le 0\}$;
б) $M = \{x \in L_2[-1,1] :\ x(t) = x(-t)$ для всех $t \in [-1,1]\}$;
в) $M = \{x \in L_2[-1,1] :\ \int_{-1}^{0} x(t)dt = \int_0^1 x(t)dt\}$;
г) M – множество всех ступенчатых функций (число ступенек конечно);

1⋄7 В пространстве $L_2[0,1]$ найти расстояние от вектора $x(t) = t^n$ до подпространства $H_0 = \{x \in L_2[0,1] :\ \int_0^1 x(t)dt = 0\}$.

1⋄8 Докажите, что система многочленов Лежандра

$$P_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

образует ортонормированный базис в $L_2[-1,1]$.

1⋄9 Докажите, что в системе многочленов Чебышева I рода

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t),\ n = 0, 1, \ldots$$

а) $T_n(t)$ является многочленом степени n;
б) функция $T_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(1-t^2)T_n''(t) - tT_n'(t) + n^2T_n(t) = 0;$$

в) все функции ортогональны в пространстве $L_2[-1,1]$ с весом $(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$;
г) образуют в этом пространстве ортогональный базис.

1⋄10 (*) Докажите, что среди всех многочленов вида $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$ наименьшую норму в вещественном пространстве $C[-1,1]$ имеет многочлен Чебышева (I рода) $T_n(t) = 2^{1-n}\cos(n \arccos t)$.

1⋄11 Докажите, что система Радемахера $r_n(t) = \operatorname{sign}\sin(2^n\pi t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ортонормированна, но не полна в $L_2[0,1]$.

1⋄12 (*) Пусть $\{e_n\}_1^\infty$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H, а ортонормированная система $\{f_n\}_1^\infty$ "не сильно отличается" от исходной системы, т.е. $\sum_{n=1}^\infty \|e_n - f_n\|^2 < \infty$. Докажите, что эта система также является ортонормированным базисом в H.
(*Указание.* 1) Предположив противное, составьте ортонормированную систему $\{f_n\}_0^N$ со свойством $\sum_{k>N} \|e_k - f_k\|^2 < 1$. 2) Докажите линейную независимость системы $\{f_n\}_0^N$, построив вектор $h = \sum_{n=0}^N \alpha_n f_n$, ортогональный всем векторам e_k, $k = 1, \ldots, N$.)