

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2017  
ЛИСТОК 1

срок сдачи 30.01.2017

1. Приведите пример функции  $f(z, \bar{z})$ , для которой предел  $z \rightarrow 0$  вдоль любой прямой существует, и все такие пределы равны между собой, но при этом  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z, \bar{z})$  не существует.
2. Пусть  $f(z)$  – дифференцируемая функция комплексного переменного в точке  $a$ . Докажите, что функция  $\overline{f(\bar{z})}$  дифференцируема в точке  $\bar{a}$ .
3. а) Напишите уравнение окружности, проходящей через три (различные) точки  $z_1, z_2, z_3$ , не лежащие на одной прямой.  
б) Докажите, что четыре (различные) точки  $z_1, z_2, z_3, z_4$  лежат на одной окружности или прямой тогда и только тогда, когда их двойное отношение  $\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}$  вещественно.
4. Докажите, что при преобразовании  $z \mapsto 1/z$  окружность переходит в окружность или прямую, а также что прямая переходит в окружность или прямую.
5. а) Докажите, что если голоморфная в некоторой области функция  $f(z)$  вещественна (т.е. принимает только вещественные значения), то она постоянна.  
б) Пусть функция  $f(z)$  голоморфна в некоторой области  $D$ , и  $|f(z)| = 1$  всюду в этой области. Докажите, что  $f(z) \equiv \text{const}$ .
6. Восстановите голоморфную функцию  $f(z)$ ,  $z = x + iy$ , по заданной функции  
а)  $\text{Re } f(z) = x \cos x \cosh y + y \sin x \sinh y$  (при условии, что  $f(0) = 0$ ),  
б)  $\arg f(z) = xy \pmod{2\pi}$  (при условии, что  $f(0) = 1$ ).

Вещественнозначная функция двух переменных  $F(x, y)$  называется *гармонической*, если  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ .

7. а) Пусть  $f(z)$  – голоморфная функция. Докажите, что функции  $\text{Re } f$  и  $\text{Im } f$  – гармонические. Что можно сказать о функциях  $|f|$  и  $\arg f$ ?  
б) Пусть  $F(x, y)$  – гармоническая функция. Для каких функций  $G$  функция  $G(F(x, y))$  тоже будет гармонической?
8. Найдите все гармонические функции вида а)  $F = \varphi(x^2 + y^2)$ , б)  $F = \varphi(x^2 - y^2)$ , в)  $F = \varphi(y/x)$ .