Листок 6

(Листок 5 и 6 можно сдавать до 24.00 15 февраля 2017 года)

1. Пусть $g(x) = Ox + b$ (где $O \in O(n)$, b – вектор сдвига) – движение аффинного евклидова пространства E^n. Для того, чтобы движение g имело неподвижную точку, необходимо и достаточно, чтобы вектор b был ортогонален пространству собственных векторов оператора O с собственным значением 1. Доказать.

2. Доказать, что всякое движение аффинного евклидова пространства E^n обладает либо неподвижной точкой, либо инвариантной прямой.

3. Доказать: для того, чтобы билинейная форма была представима в виде произведения двух линейных функций, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы Грама был равен 1.

4. В четырехмерном пространстве дана кососимметрическая билинейная форма $x_1y_2 - y_1x_2 + x_1y_3 - y_1x_3 + x_1y_4 - y_1x_4 + x_2y_3 - y_2x_3 + x_2y_4 - y_2x_4 + x_3y_4 - y_3x_4$. Привести эту форму к каноническому виду.

5. Доказать ,что положительно определенную квадратичную форму можно привести к каноническому виду треугольным преобразованием неизвестных, или, если угодно, для всякой положительно определенной симметричной матрицы A существует такая верхняя треугольная матрица S, что $A = S^tS$.

Пусть (V, ω) – $2n$-мерное симплектическое пространство. Подпространство $W \in V$ называется изотропным, если при ограничении формы ω на W получается нулевая форма, и симплектическим, если это ограничение невырожденно.

Максимальное (по включению) изотропное подпространство называется лагранжевым.

6. Доказать,что подпространство W лагранжево тогда и только тогда, когда $W^\perp = W$.

7. Доказать, что группа симплектических автоморфизмов пространства (V, ω) транзитивно действует на множестве его лагранжевых подпространств.

8. Доказать,что группа симплектических автоморфизмов пространства (V, ω) транзитивно действует на множестве его симплектических подпространств размерности $2k$, $k < n$.

9*. Доказать,что определитель симплектического автоморфизма равен 1.

10. Вычислить сигнатуру квадратичной формы $\mathrm{Tr}(X^2)$ на пространстве вещественных $n \times n$ матриц с нулевым следом.