

ЛИСТОК 1. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА–ЛАГРАНЖА И ЕГО  
ОБОБЩЕНИЯ

ВАР ИСЧ., 3-4 КУРС, 16.01.2017

- 1◊1 Найдите вариации функционалов: **а)**  $J[x] = \int_a^b x \dot{x} dt$ ; **б)**  $J[x] = \int_0^\pi \dot{x} \sin x dt$ ;  
**в)**  $J[x] = x^2(0) + \int_0^1 (tx + \dot{x}^2) dt$ .
- 1◊2 Решите простейшую задачу вариационного исчисления для функционалов:  
**а)**  $J[x] = \int_0^1 (x + \dot{x})^2 dt$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x(1) = 1$ ;  
**б)**  $J[x] = \int_1^e \left[ \frac{2x}{t} + x\dot{x} + t^2 \dot{x}^2 \right] dt$ ,  $x(1) = 1$ ,  $x(e) = 0$ .
- 1◊3 Приведите пример простейшей задачи вариационного исчисления, когда интеграл энергии не дает всех решений уравнения Эйлера–Лагранжа.
- 1◊4 Найдите экстремли функционала:

$$J[x_1, x_2] = \int_a^b (2x_1 x_2 - 2x_1^2 + \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2) dt.$$

- 1◊5 **а)** Решите задачу со свободным концом:  $J[x] = \int_0^2 [2tx + \dot{x}^2] dt$ ,  $x(0) = 0$ .  
**б)** Решите задачу без ограничений:  $J[x] = \int_0^e \left[ t\dot{x}^2 + \frac{x^2}{t} + \frac{2x \ln t}{t} \right] dt$ .
- 1◊6 Однородная балка прямоугольного сечения с постоянной толщиной и шириной прогибается под действием силы тяжести. Потенциальная энергия упругой деформации балки имеет вид

$$U_{\text{упр}} = \int_0^L (y'')^2 dx,$$

где  $L$  — длина балки, а функция  $y(x)$  задает отклонение средней линии балки вниз от горизонтали. В состоянии равновесия потенциальная энергия минимальна. Определите форму балки для трех нижеперечисленных условий.

- а)** Мостик: концы балки свободно лежат на двух опорах, опоры расположены на одной высоте.
- б)** Перекрытие (потолок): балка обоими концами горизонтально вмонтирована в стену.
- в)** Балкон: балка одним концом горизонтально вмонтирована в стену, а другой конец ее не закреплен.
- (Указание: граничным условием, если балка лежит на опоре, является  $y(x_0) = 0$ , а если балка вмонтирована в стену, то  $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ .)