

Семинар 3

1. Пусть $Q(x)$ – квадратичная форма в вещественном пространстве V , причем $Q(a) > 0$, а $Q(b) < 0$, $a, b \in V$. Доказать, что

а) векторы a и b линейно независимы;

б) в пространстве с базисом a и b существуют два линейно независимых вектора x и y , для которых $Q(x) = Q(y) = 0$, но при этом векторы x и y не лежат в $\text{Rad}V$.

2. Найти полюс прямой $3x - y + 6 = 0$ относительно квадратики $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$.

3. Найти в однородных координатах какое-нибудь проективное преобразование трехмерного проективного пространства, которое однополостный гиперболоид (на карте $t \neq 0$) $x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0$ преобразует в гиперболический параболоид (на той же карте) $2zt = x^2 - y^2$. Постарайтесь понять, что гиперболический параболоид, пополненный бесконечно удаленными точками (какими?), является тором.

4. Доказать, что в невырожденном n -мерном квадратичном пространстве размерность изотропного подпространства не превосходит числа $n/2$.

5. Пусть $Q(x) + 2L(x) + c = 0$ квадратики в аффинном пространстве, u -неизотропный вектор ($Q(u) \neq 0$). Доказать, что середины хорд квадратики, параллельных вектору u , лежат в одной гиперплоскости. Написать ее уравнение.